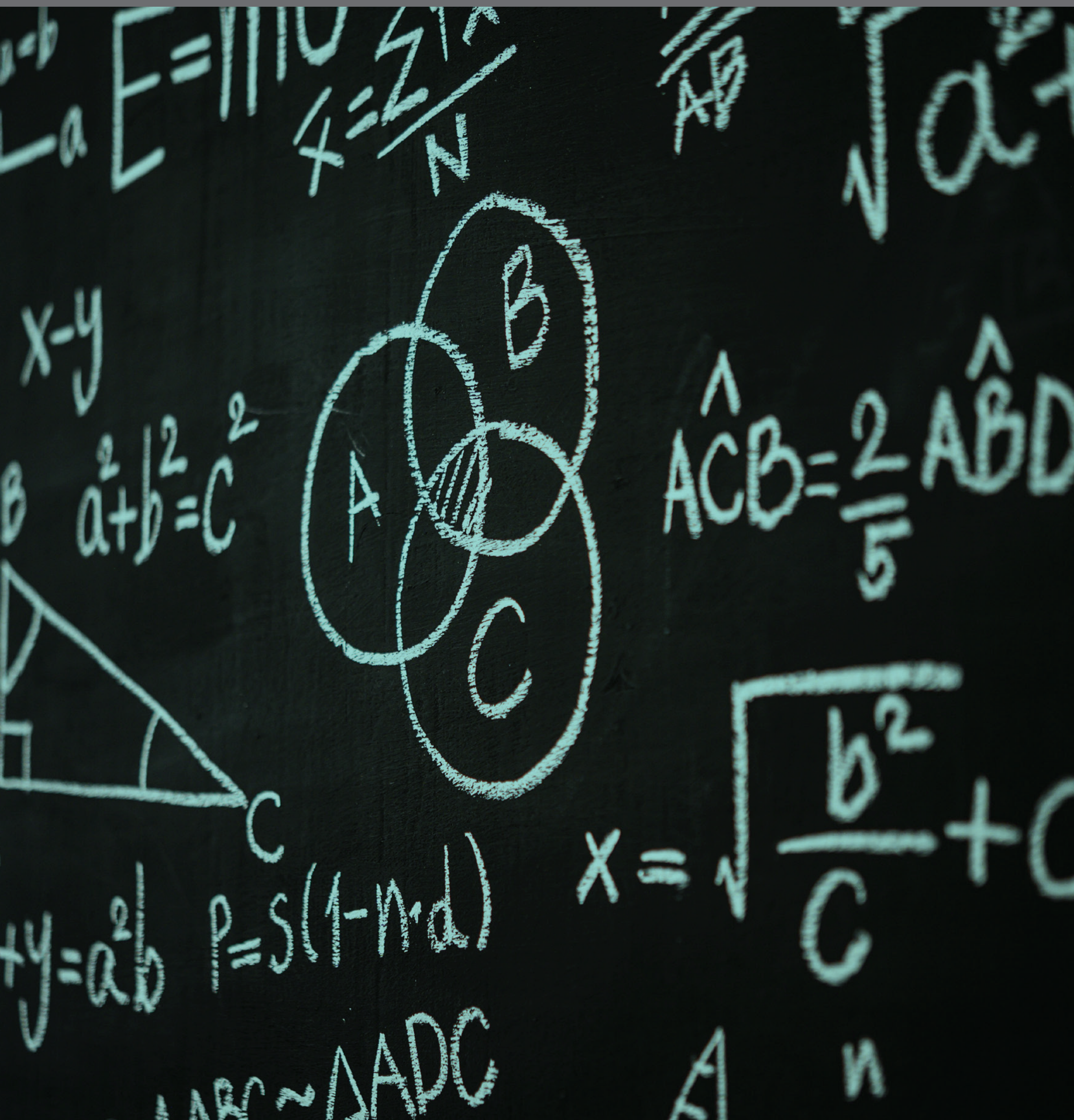
TECNOLÓGICO UNIVERSITARIO PICHINCHA

1 Nivel

Matemática Aplicada

Guía general de estudios de la asignatura

Modalidad de Educación a Distancia
Tecnología Superior "Talento Humano"



Autor:
Dr. Ing. Kelvin Espinosa Arregui

Periodo académico octubre 2023 - marzo 2024

Modalidad Distancia

TECNOLÓGICO UNIVERSITARIO PICHINCHA

Matemática Aplicada
Guía general de estudios de la asignatura

© Dr. Ing. Kelvin Espinosa Arregui

ISBN: 978-9942-672-15-5

Edición: Julio 2024

Texto digital proporcionado por el autor.

TALLPA Publicidad Impresa - 2540 662 - 09 9561 4887
Quito - Ecuador

PRÓLOGO

Ha sido y es objetivo fundamental del instituto utilizar herramientas esenciales para que nuestros estudiantes logren alcanzar una formación integral. Bajo esta consideración ponemos a disposición estas guías de estudio que posibilitarán, sin duda, puedan organizarse para comprender el contenido de las diferentes asignaturas.

Estas guías han sido creadas por un equipo de profesionales altamente capacitados en cada asignatura, con el objetivo de convertir su proceso de aprendizaje en una experiencia enriquecedora.

Nuestros docentes han recopilado información, han sintetizado temas, organizado conceptos y aspectos relevantes para que cada guía se presente cuidadosamente elaborada para responder a la realidad actual, con contenidos actualizados y a la vanguardia del conocimiento. La didáctica empleada facilitará la comprensión y aprendizaje de cada tema, permitiéndoles avanzar de manera efectiva en su formación profesional. En la elaboración de estas guías se denota el compromiso del instituto para lograr el éxito académico.

La diagramación de estas guías ha sido pensada para ser clara y atractiva, transmitiendo los conocimientos de manera amena y accesible. Queremos que nuestros estudiantes disfruten del proceso de aprendizaje encontrando en cada página una herramienta útil que les motive a salir adelante en su camino educativo.

Estimados estudiantes: Les deseamos éxito en su recorrido académico, que el Instituto Tecnológico Universitario Pichincha estará siempre pendiente por vuestro éxito educativo.

Dr. Edgar Espinosa. MSc.
RECTOR ISTP-U

ÍNDICE

2. Introducción

La Matemática es una de herramienta fundamental en el desarrollo profesional de cualquier ser humano, por tanto aprender esta ciencia exige comprensión y aplicación de definiciones, propiedades, leyes y conceptos, se hace necesario que usted coceptualize las condiciones para manejar y comprender a los números.

La asignatura de Matemática Aplicada tiene cuatro créditos académicos, de tipo genérico y transversal, es fundamental para su formación, le permitirá desarrollar competencias requeridas en su vida profesional, éste componente pretende que adquiera fundamentos matemáticos básicos y necesarios para carreras como: Administración de Empresas, de Banca, Finanzas, Administración en Gestión Pública, Contabilidad y Auditoría, Economía y Administración de Empresas Turísticas y Hoteleras, entre otras; por tal motivo la planificación se centra en análisis de conceptos, estructuras, reglas, métodos, aplicaciones, interpretaciones y habilidades, para facilitar la comprensión de contenidos de esta asignatura.

La planificación y estructura de la asignatura está descrita en ocho unidades, para dos bimestres:

El primer bimestre inicia con fundamentos del álgebra, es requicito conocimiento de álgebra elemental, análisis de ecuaciones y desigualdades, incluyendo ecuaciones no lineales, con literales, cuadráticas, fraccionarias, con radicales y desigualdades con valor absoluto. El análisis con problemas prácticos complemente a esta unidad. Este bimestre culminará con el estudio de sistemas y métodos de resolucion de ecuaciones.

El segundo bimestre inicia con el algebra matricial, métodos de identificación y reconocimiento de matrices, estudio de las diferentes operaciones y la aplicación del método de Gauss – Jordan. A continuación las funciones, en sus diferentes tipos, su representación gráfica, operaciones, funciones exponenciales y logarítmicas, para finalizar el bimestre con matemática financiera aplicación y cálculo de anualidades.

Como cualquier metodología de aprendizaje, eduacar a distancia es un proceso autónomo que puede pasar de tedioso a sencillo y agradable cuando las actividades que conlleva se las realice de manera responsable, ordenada y secuencial.

3. Competencias para el aprendizaje

Competencias genéricas del ISTHCP

- Pensamiento crítico y reflexivo
- Creatividad y pericia
- Autonomía
- Trabajo en equipo
- Responsabilidad social
- Manejo de tecnología
- Organización y planificación del tiempo
- Investigación
- Razonamiento lógico matemático.

Competencias específicas de la carrera

- Aplicar con ética los conocimientos científicos y tecnológicos, en el campo de las micros y pequeñas empresas y organizaciones.
- Elaborar diagnósticos y análisis de la realidad local, considerando los aspectos de
- soberanía, seguridad, sustentabilidad ecológica, social, cultural, política y ética;
- Desarrollar emprendimientos en el área de micros y pequeñas empresas, talleres artesanales y economía popular y solidaria.
- Integrar los conocimientos, la investigación y la vinculación con la sociedad, a los procesos productivos económicos sociales de las asociaciones y unidades de producción, con competencias para promover el desarrollo local.

Competencias específicas de la asignatura

- Adquiere la destreza del manejo numérico y la capacidad del razonamiento lógico matemático.

- Utiliza la abstracción como una habilidad adquirida para sintetizar y analizar de situaciones propuestas.
- Participa efectiva y frecuentemente en grupos de trabajo, proponiendo soluciones apoyadas en metodologías cuantitativas.
- Demuestra conocimiento en metodologías y técnicas administrativas y financieras aprovechando recursos eficientemente.
- Resuelve y traslada a lenguaje matemática conflictos o problemas empresariales relativos o aplicables al talento humano.
- Proyecta y modela matemáticamente situaciones a mediano y largo plazo empresariales y del personal.
- Puede resolver sistemas de ecuaciones aplicadas a la oferta y demanda administrativa de bienes y servicios.

4. Bibliografía

Básica

Haeussler, E. ; Richard, P. y Richard, W., (2015). *Matemáticas para Administración y economía*. México: Pearson Educación.

El texto cumple con detalles didácticos como los siguientes:

- Actualidad en los temas y aplicaciones a situaciones reales para las carreras de Administración de Empresas, Administración en Banca Finanzas, Administración en Gestión Pública, Contabilidad y Auditoría, Economía y Administración de Empresas Turísticas y Hoteleras.
- Cuida de la presentación y posee un método muy didáctico que facilitará la comprensión de temas seleccionados para esta materia.
- Cada tema finaliza con ejercicios propuestos y autoevaluaciones, para fortalecer y evaluar los conocimientos adquiridos.
- El solucionario que se encuentra en las páginas finales del texto ayuda a contrastar las respuestas.
- Contiene casos prácticos en los que se aplican los contenidos.

Espinosa, K. (2022). *Guía general dídactica de Matemática Aplicada*. Quito, Ecuador: Ed. xxxxxxx

Es ésta guía didáctica que lo guiará en el proceso de aprendizaje con técnicas y métodos para la resolución de problemas y ejercicios. Además le permitirá identificar la secuencia de los temas a estudiar de la asignatura, facilitando, potenciando y activando sus conocimientos en esta ciencia, además de lo siguiente:

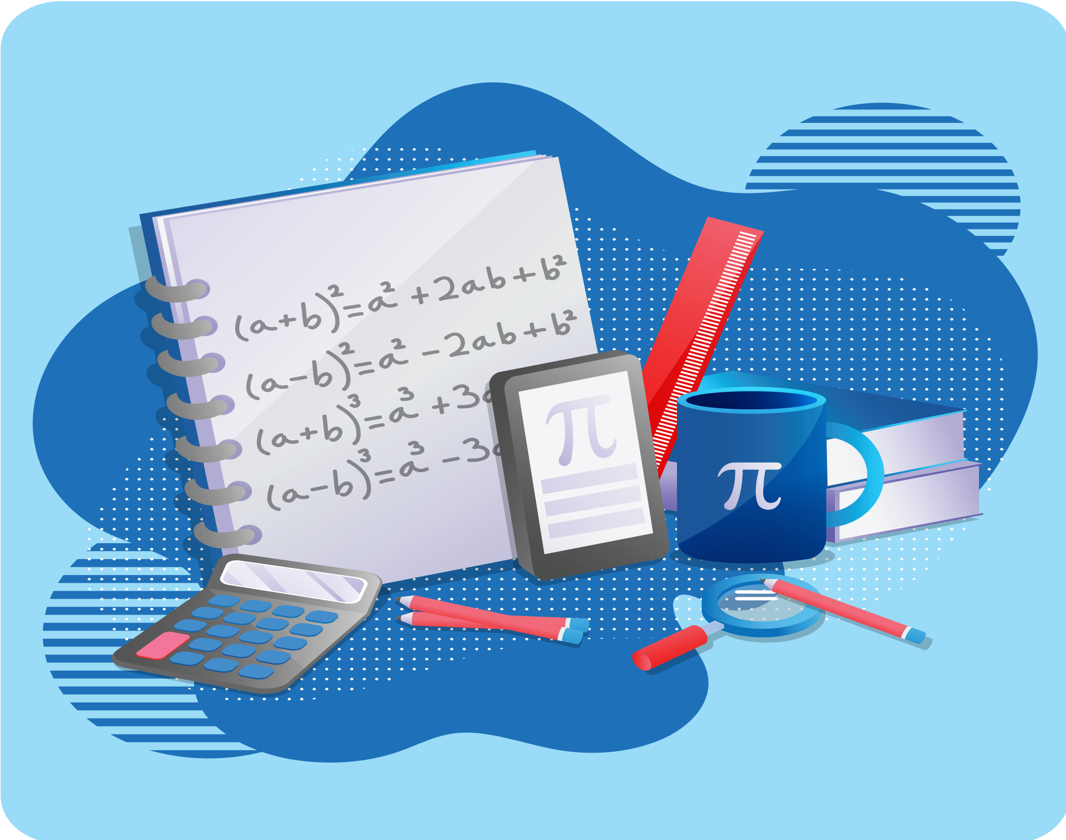
- Cada tema tiene una introducción y más de 100 ejemplos desarrollados paso a paso, gráficas, ejercicios de retroalimentación y aplicaciones a la vida real que le permitirán comprender y dominar el tópico.
- Las actividades adicionales son recomendadadas y autoevaluadas, algunas de estas tendrán relación con el texto básico, las autoevaluaciones siempre se encuentran al final de cada unidad con las soluciones en las páginas finales de la guía.
- Encontrará las evaluaciones a distancia, este documento puede utilizarlo como un borrador, puesto que las soluciones deberá ingresarlas en el Entorno Virtual de Aprendizaje "EVA" en los días y horas indicadas en el calendario académico.

Complementaria

Jagdish, C. Ayra, W., Lardner (2015). Matematicas Aplicadas a la Administracion y a la Economia, México. Pearson Educación.

Este texto tene el propósito de complementario porque refuerza las orientaciones dadas por el texto principal, no descuida otras áreas de estudio, presenta ejemplos prácticos que le permitirán al estudiante relacionar la aplicación de esta ciencia a situaciones prácticas de su vida cotidiana y sobretodo profesional.

De igual manera encontrará al final de cada tema varios ejercicios propuestos, para poner en práctica los conocimientos adquiridos, además resolverá problemas con temáticas diferentes, que no han sido incluidos en el texto básico o en esta guía general didáctica.

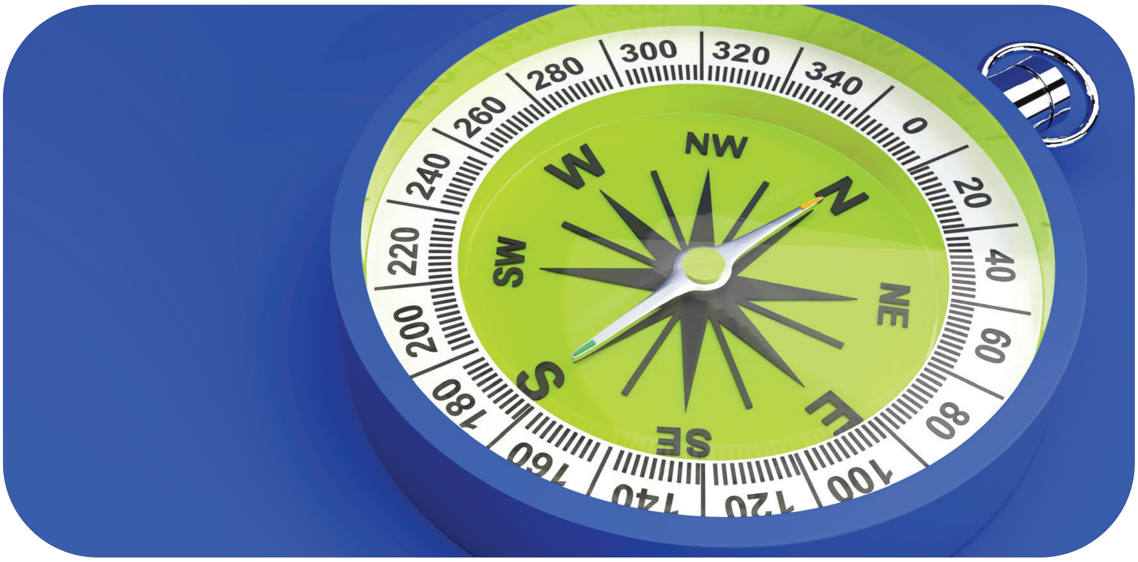


5. Metodología de aprendizaje

Un aprendizaje basado en análisis y estudios de casos, en el que se presentará al estudiante situaciones reales o hipotéticas para su análisis; de tal manera, que, asuma un rol diligente para relacionar, medir y comparar los contenidos teóricos con la práctica y ser capaz de proponer soluciones previa la revisión de recursos complementarios como lecturas, artículos, presentaciones, diagramas, etc., que aporten información adicional.

En cuanto al aprendizaje a través de las TICs, se desarrollaràn actividades académicas propuestas, a través de la interacción en la plataforma MOODLE, propiciando el interés, la motivación, la dinámica de un aprendizaje cooperativo y creativo que requiere de la partipación constante, en actividades síncronas como asíncronas.

La permanente orientación y guía del docente tutor, es parte de la metodología de aprendizaje también, las tutorías despejan dudas u obstáculos que a partir de su análisis previo, necesite para tomar una decisión apegada a situaciones reales que necesiten de la matemática para su conclusiòn.



6. Orientaciones generales para el estudio

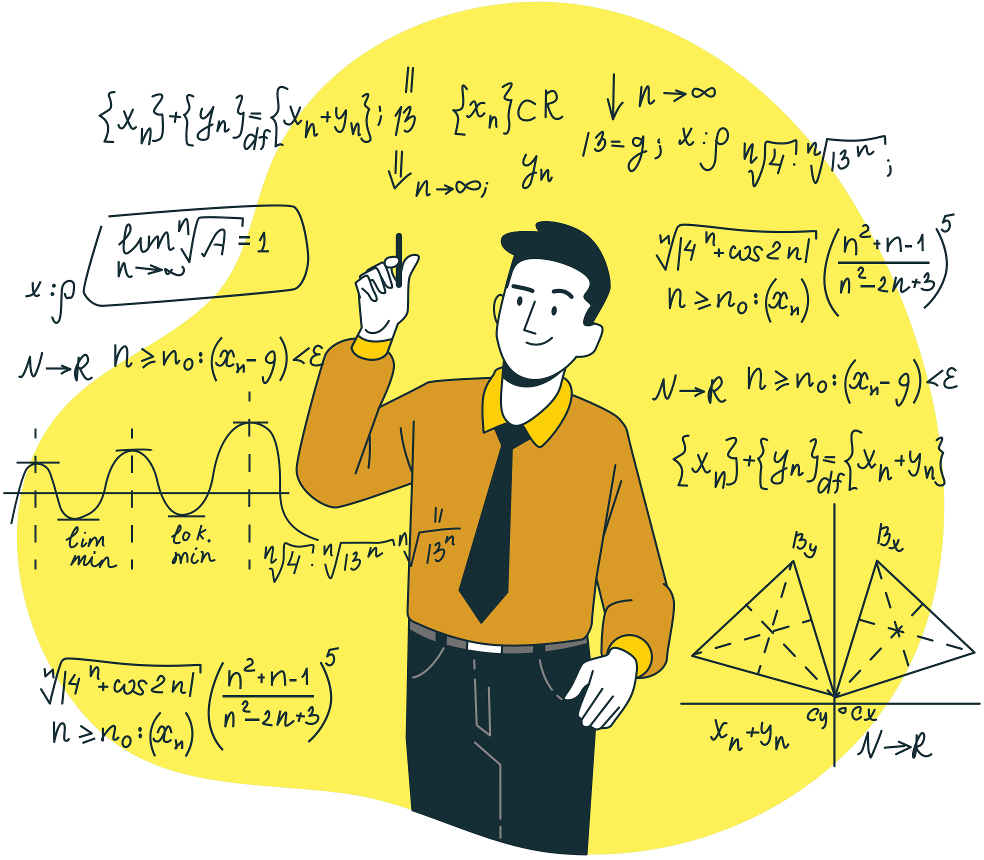
Srta. o Sr. estudiante, para que su aprendizaje sea significativo y lleve la secuencialidad de los procesos, se recomienda tener en cuenta éstas orientaciones:

- Son materiales necesarios para el estudio, el texto básico, la guía didáctica y las evaluaciones a distancia.
- Es conveniente trabajar de manera simultánea con el texto y la guía didáctica.
- Los materiales de papelería básicos, como un cuaderno, lápiz y borrador, que le permitan realizar anotaciones y desarrollar ejercicios son necesarios.
- Deberá dedicarle por lo menos 4 hotas por semana a estudiar ésta materia, para lo cual programar un horario es fundamental.
- Lea y comprenda el texto básico, en el tema o unidad correspondiente, revise y analize la guía didáctica y emprenda los ejemplos ilustrativos, realice las actividades recomendadas y resuelva la autoevaluación al final de cada unidad.
- Estudie de manera secuencial los temas asegurando la comprensión de ellos, dedique mas tiempo a los conceptos, definiciones y la aplicación de propiedades.
- La variedad de ejercicios y problemas incluidos son tomados del texto básico y libros complementarios seleccionados por componentes que le permiten observar cómo aplicar las matemáticas que está aprendiendo, además dispondrá de más ejercicios que le aseguran fortalecer su aprendizaje.

- Antes de empezar un nuevo tema, asegúrece de haber comprendido la unidad anterior. Si aún tiene dudas, repase nuevamente, consulte con su profesor tutor, quien le ayudará a clarificar los tópicos de mayor conplejidad.
- Adicionalmente las 8 autoevaluaciones incluidas tambien le permiten practicar y retroalimentar con las soluciones al final de la presente guía.
- Elabore sus tareas a distancia constante y paulatinamente, evite retrazos y acumulaciones, recuerde es una por cada bimestre, su presentación es obligatoria, en el Entorno Virtual de Aprendizaje (EVA), en los días y horas indicadas en su calendario académico.
- Cada bimestre tiene 8 semanas, utilice 6 para su estudio autónomo, desarrollo de las autoevaluaciones y evaluación a distancia, y 2 semanas para repaso y preparación a la prueba presencial.
- Siempre es útil comunicarse con su tutor si tiene dificultades. Encuentre el horario de tutorías y los datos de contacto en el aula virtual correspondiente.
- El material virtual implementado por la institución brindará el ingreso a sus evaluaciones a distancia, encontrará asesoría para la asignatura, material en digital y la posibilidad de interactuar con el profesor y compañeros. Acceda a través de la dirección electrónica www.tecnológicopichincha.edu.ec.
- En ésta guía se incluye la "planificación para el trabajo del alumno", revísela, y programa su estudia por que es un aporte importante a su estudio.
- Genere un aprendizaje autónomo, responsable y organizado. Siga de forma adecuada indicaciones y autoevaluaciones de cada unidad, sepa que son estrategias de aprendizaje que le permitirán conocer su avance académico.

Nota:

Por su participación en el EVA con actividades como chat, foros y video – colaboración, usted será acreedor de hasta un punto adicional por cada actividad, esto quiere decir que podrá incrementar su calificación hasta con tres puntos.



Primer Bimestre

Resultado de aprendizaje	Sabe y conoce los antecedentes y nociones generales o básicas de la Matemática

Por medio de este resultado de aprendizaje, usted llegará a determinar la evolución de la matemática a través del tiempo e identificará los números como símbolos necesarios para el desarrollo del conocimiento de la humanidad.

En la presente unidad se conocerá los números su origen, evolución, tipos y aplicación de estos en situaciones reales, para lo cual deberá identificar, ubicar y utilizar de adecuada manera en problemas y ejercicios propuestos.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje

Unidad 1. Fundamentos del Algebra

Semana 1

Esta unidad expone conceptos fundamentales ya estudiados por usted, y al considerarlos importantes se hace impresindible que los recuerde y que además sepa que son útiles para todos los contenidos que va ha adquirir durante el curso de matemática aplicada, estos temas empiezan por conocer y saber que son y para que sirven los tipos de números utilizados hoy en día y todos los demás tópicos que son cimiento de varios contenidos que es nuestro deber recordarles y resumirlos para que lo conozcan de manera práctica.

Al remontarse a la historia los primeros conocimientos de referencias de utilización de matemáticas en una cultura datan del 3.000 antes de Cristo. Empezaron a surgir en la zona de Egipto y Babilonia y posteriormente se fueron expandiendo por todo el mundo. Esta cultura utilizaba las matemáticas como una pura aritmética.

Se continúa con el estudio de los números y se amplía hasta los números reales.También se estudian las distintas representaciones de los números como los números fraccionarios, los porcentajes y los números decimales. Va a ser una gran opción incluir distintas numeraciones de diversas culturas, y comentar los diversos tipos de representación.

Según Sánchez Ávila (14), se debe destacar que lo principal no es la destreza del cálculo

sino la comprensión operacional que permite el adecuado uso de las matemáticas. Paralelamente se desarrollará el estudio de la capacidad de estimar magnitudes y la del cálculo mental.

Introducir la historia para el tratamiento de este tema, sería comentar que el pueblo egipcio fue el primer pueblo que inició este tipo de cálculos con números decimales o fracciones.

¿Qué son los Nùmeros?

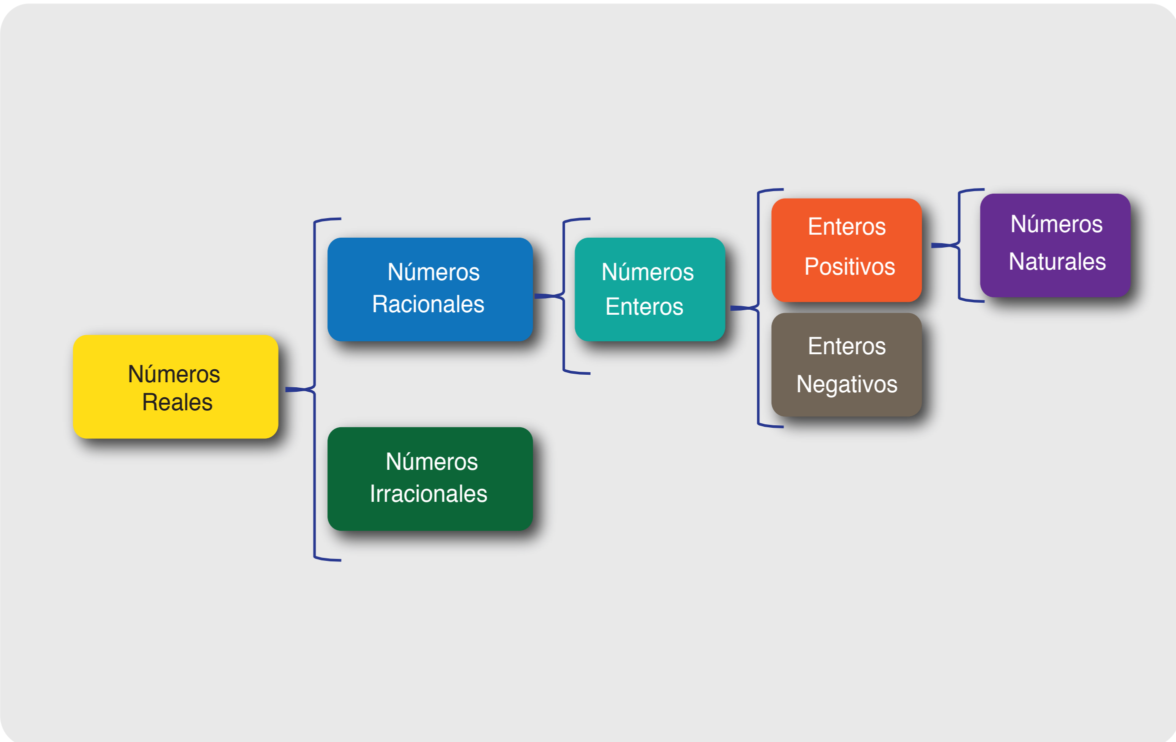
Son elementos básicos de la matemática usado para contar, medir, resolver ecuaciones y comparar cantidades, éstos están comprendidos en un gran grupo denominado números Reales y a su vez éste grupo lo constituyen diferente clase o tipo de números con sus propias características que se les ha denominado naturales, enteros, racionales e irracionales.

1.1 Números Reales

Es el conjunto de todos los números naturales, enteros, positivos y negativos, los racionales, (fracciones o quebrados) y los números irracionales, mismos que pueden ser expresados mediante notación decimal.

El siguiente gráfico describe la clasificación de los númeross, donde los números reales son el conjunto universo y en él están inmersos los números racionales e irracionales.

Figura 1. *Números Reales:*



Nota Fuente. de Espinosa. K, (2021), Guía Didáctica Matemática, Quito: ISTHCPP

Los Números Naturales

Ejemplos de números naturales:

- Los números del celular
- Los números de casa dirección

Características

- Son mayores que el "cero"
- Sirven para contar.
- No tienen parte decimal.

Actividades

Escribir su ejemplo:

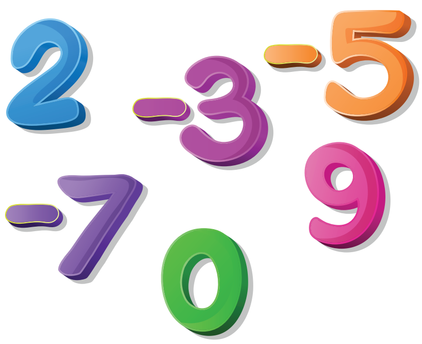
....

Los números 1, 2, 3, 4,......se usan para contar y son los primeros que se aprenden en la primaria, a estos les llamamos: números naturales. Esta sucesión de números es infinita y se encuentra representada por la letra "N", así:

$$N = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; \dots \dots .10; \dots \dots \dots ..\}$$

Nota:
Algunos autores no incluyen al número cero "0" como un número natural, sin embargo es útil para el 10, 100, 1000

Los Números Enteros



Son ejemplos los siguientes

- Los números del ascensor
- Los números del aC y dC
- La Temperatura bajo cero.

Características

- Incluyen el "cero"
- Incluyen a los Naturales.
- Incluyen a los negativos
- No tienen parte decimal.

ACTIVIDADES

Escriba su ejemplo:

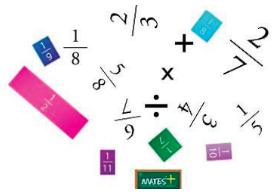
....

Los números naturales junto al “0”, positivos y negativos, forman el conjunto de los números enteros, representados por la letra “Z”, asi:

$$Z = \{\dots\dots -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\dots..\}$$

Recuerda:
Los números naturales son parte de los números enteros.

Nota:
Solo los números negativos escriben el signo “menos”, los enteros positivos no requieren el signo “mas”.

Se los representa con “Q” y se forman al relacionar dos números Enteros: ... -3/2, - 2/2, -1/2, 0/3, 1/4, 2/4, ... Son los quebrados o fraccionarios y los que se pueden dividir para “1”.	**Los Números Racionales** 
Características • Incluyen el “cero” como numerador pero no como denominador. • Incluyen a los Enteros. • Forman decimales.	**Tipos de decimales** Si los decimales son finitos o Si los decimales son infinitos y repetitivos son nùmeros Racionales.
Son ejemplos los siguientes • La media de estatura, Ej. 122,4 cm. • 1,5; 2,125; 5,123123123...	**Actividades** Escriba su ejemplo: ....

Los números racionales, se forman por expresar en una división dos números enteros, son los comunmente llamos quebrados o números fraccionarios representados por la letra “Q”, algunso ejemplos son:

$$Q = \left\{\dots\dots -\frac{1}{3}; -\frac{1}{2}; \frac{2}{1}; \frac{5}{2}; \frac{5}{1}; \dots\dots..\right\}$$

Nota:
Todo número esta dividido para ”1” aunque no se escribe, es el caso del número “2, 5”, por lo tanto son número racionales.

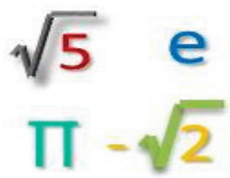
$-\frac{3}{0}; \frac{2}{1}$

Recuerda:
La división para cero no esta definida en matemática y no se utilizará.

Estos números racionales también pueden mostrarse de manera decimal; para lo cual su resultado debe ser que sus cifras decimales sean exactas o periódicas así:

$-\frac{1}{2} = -0,5$	$\frac{5}{11} = 0,45454545 \ldots \ldots \ldots$
Decimal exacto	Decimal periódico

Recuerda:
Los números enteros son un subconjunto de los números racionales.

Se los representa con “I” y Son los que no resultan de la divisiòn de dos números Enteros: -3,1235… - , 1,73205…; ;	**Números Irracionales** 
Características • No son Racionales. • Generalmente son constantes. Si tienen parte decimal	**Tipos de decimales** • Si los decimales son infinitos y no repetitivos.
Son números racinales los siguientes • El valor de π, (3,14…..) • El Valor de $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$…. • El Valor de “e”, (2,718281828….)	**Actividades** Escriba su ejemplo: ……..………………………….…..…

Ahora, ¿dónde quedan aquellos números fraccionarios que presentan decimales inexactos y no- periódicos?, a estos les corresponde el conjunto de números irracionales, se los representa con la letra Q’.

Algunos ejemplos de este tipo de números son:

$-\sqrt{3} = -1,73205$	$\pi = 3,14158$
Decimales inexactos y periódicos	

Recuerda:
Revise el apartado 0.2 de su texto básico, las páginas 3 y 4, en donde encontrará la teoría y ejemplos prácticos de las propiedades de los números reales.

1.2 Exponentes

Estimado estudiante la multiplicación de un número o símbolo por sí mismo, ya sea 2, 3, 4 o más, puede abreviarse, para ello simplemente utilizamos exponentes, tal cual como se lo detalla a continuación:

$$a^n = a.a.a.a.a.a.a \ldots \ldots .. a, donde \text{ "a" es el exponent y "n" el exponente.}$$

Ejemplo 1

$$3^4 = 3.3.3.3 = 81$$

$$3 \rightarrow base, 4 \rightarrow exponente$$

Ejemplo 2

$$2^5 = 2.2.2.2.2 = 32$$

$$2 \rightarrow base, 5 \rightarrow exponente$$

$0^o = 1$ **Definición consistente y muy útil.**

1.3 Radicales

Los radicales, se los puede expresar como:

$$a^{\frac{x}{y}} = \sqrt[y]{a^x} = \left(\sqrt[y]{a}\right)^x$$

$$\sqrt{81} = 9$$

$$2 \rightarrow raiz\ cuadrada, 2 \rightarrow índice$$

$$\sqrt[5]{32} = 2$$

$$5 \rightarrow raiz\ quinta, 5 \rightarrow índice$$

Recuerda:
En cualquier potencia, si el exponente es negativo, la base no debe ser cero, y si el exponente contiene una raíz par, la base no puede ser negativa.

Las leyes básicas de los exponentes y radicales se encuentran en la página 10 de su texto básico. Revise antes de continuar.

Autoevaluación 1.1

Lea y analice las preguntas siguientes y responda en el espacio entre paréntesis si la proposición es verdadera con "V" o falsa con "F".

1.-	( )	$3x^2 - \{2x^2 - xy - [x(x+4y) - y(2x-y)] + 3xy\} - 3y^2 = 2x^2 - 2y^2$
2.-	( )	El valor de la expresión $\frac{4x+16}{10+4x}$ $es\ igal\ a\ 4, cuando\ x = -2.$
3.-	( )	El siguiente polinomio es completo: $2x^5 + 3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 6x - 4$
4.-	( )	De $-10x^4 + 30x^3y - 15y^4\ restar\ -10x^4 + 25x^3y - 143y^4, da:$ $5x^3y - y^4$
5.-	( )	En la siguiente expresión $x = y\left[\frac{(1+i)^m - 1}{i}\right]; cuando\ m = 3; i = 2; x = 26$ Entonces y=2
6.-	( )	El siguiente polinomio es homogéneo: $22x^5 - 2x^3y^2 + 6xy^4 - 4y^5 + 20$
7.-	( )	La expresión $2x^5 - 2x^3y^2 + 6xy$ Se refiere a un polinomio ordenado.
8.-	( )	$\sqrt[m]{x}.\sqrt[n]{x} = \sqrt[mn]{x}$
9.-	( )	$\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}} = \sqrt[12]{2}$
10.-	( )	$\frac{4}{\sqrt{2x}} = \frac{2\sqrt{2x}}{x}$

Verifique sus respuestas en el solucionario que se encuentra al final de la presente guía didáctica.

"Si puedes soñarlo, puedes hacerlo"

Walt Disney

¡¡Éxitos en la tarea que ha emprendido!!

Ir al solucionario

1.4 Operaciones básicas con números reales

Los polinomios se generan de combinar números y letras, mediante una o más operaciones básicas, como: adición, sustracción, multiplicación, división, exponenciación, radicación, etc. Algunos ejemplos que se pueden citar son:

$$(5x + 7y - 3) + (3y - 2x + 9)$$

$$(a + 3b)(2x + y)$$

$$(5x - 2y)^2$$

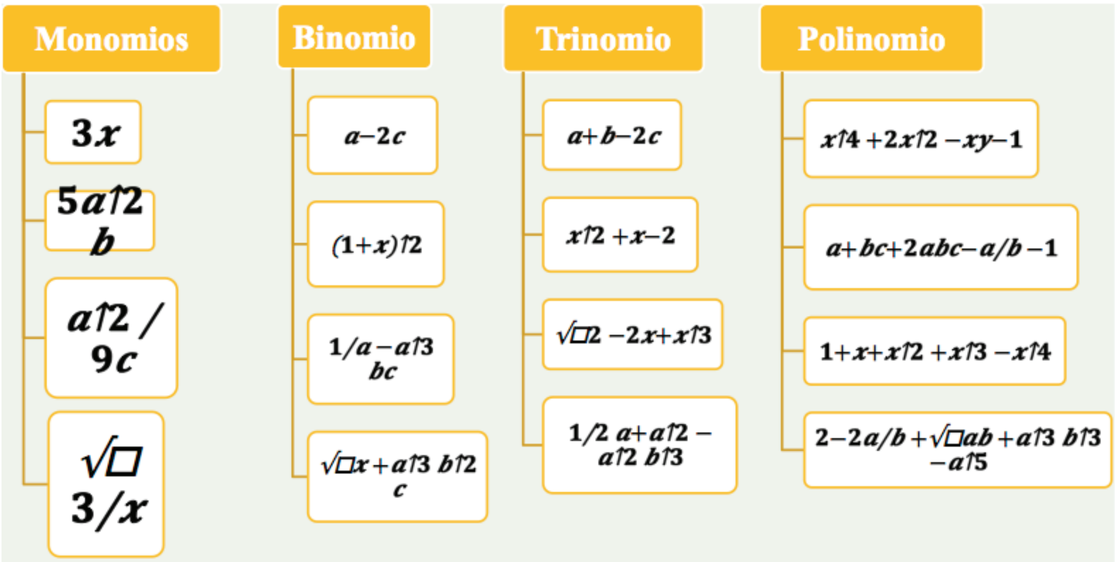


Figura 2. *Expresiones Algebraicas*

Elaborado por.Espinosa. K, (2022), Guía Didáctica Matemática, Quito: ISTHCPP

Recuerda:
En general una expresión que contiene más de un término se denomina "multinomio".

1.4.1 Adición de polinomios

La suma o adición de polinomios es una operación en la que dos o más polinomios se asocian para agregarse ordenadamente y obtener un tercero que es el resultado o respuesta.

Recuerda:
Que los términos semejantes son aquellos que solo difieren por sus coeficientes numéricos.

Recuerda:
La Resta o Sustracción es la suma del opuesto de un número llamado sustraendo.
Ejemplo: De 5 Restar 2

$$5 \rightarrow \boldsymbol{minuendo}$$

$$2 \rightarrow \boldsymbol{sustraendo\ u\ opuesto\ del\ número\ "-2"}$$

5+(-2) =5-2=3.

Ejemplo 3

Para sumar $(2x^2+2x-5)+(x^2-5x-3)-2x^2-2$, se puede procesar asi:

$$2x^2+2x-5+x^2-5x-3-2x^2-2$$

Se eliminaron los signos de agrupación

$$2x^2+x^2-2x^2+2x-5x-5-3-2$$

Se agruparon y resuelven términos semejantes

$$x^2-3x-10, \quad \text{Rta.}$$

1.4.2 Sustracción de polinomios

Usted debe recordar que la resta es la operación opuesta a la suma y bajo este principio para poder realizar esta operación es preferible convertirla en suma, es decir al minuendo se le adiciona o suma el opuesto del sustraendo

Ejemplo 4

De $(2x^2+2x-5)\ Restar\ (x^2-5x-3)$, se puede procesar asi:

$$2x^2+2x-5-(x^2-5x-3)$$

Se elimina signos de agrupación e identifica el sustraendo

$$2x^2+2x-5-x^2+5x+3$$

Se aplicó el principio del opuesto del número al eliminar el signo de agrupación

$$x^2+7x-2$$

Se reducieron términos semejantes

$$\boldsymbol{x^2+7x-2}, \quad \boldsymbol{Rta.}$$

1.4.3 Multiplicación de polinomios

Se llama multiplicación de polinomios cuando cada monomio de un polinomio se multiplica por cada uno de los términos del otro polinomio.

Ejemplo 5

Multiplique $(x^2 + 2x - 2)\ por\ (x^2 - 5x - 1)$,

se puede procesar mediante la propiedad distributiva, asi:

$$(x^2 + 2x - 2)(x^2 - 5x - 1),$$

$$\boldsymbol{x^2x^2 - x^2 5x - x^2 + 2xx^2 - 2x5x - 2x - 2x^2 + 10x + 2}$$

Se elimina signos de agrupación y aplicò la propiedad distriburiva

$$\boldsymbol{x^4 - 5x^3 - x^2 + 2x^3 - 10x^2 - 2x - 2x^2 + 10x + 2}$$

Se multiplica y simplifica las expresiones

$$x^4 - 5x^3 + 2x^3 - x^2 - 10x^2 - 2x^2 - 2x + 10x + 2$$

Se ordenan y agrupan por términos semejantes

$$x^4 - 3x^3 - 13x^2 + 8x + 2$$

Se redujeron términos semejantes y ordenando así:

$$\boldsymbol{x^4 - 3x^3 - 13x^2 + 8x + 2, \qquad Rta.}$$

Recuerda:
Si se multiplican signos iguales, respuesta positiva.
Si se multiplican signos desiguales respuesta negativa.

A continuación, le invito a desarrollar la siguiente autoevaluación, cuyo objetivo es conocer cuánto usted ha comprendido del tema, además podrá revisar en la sección del solucionario, la retroalimentación de cada pregunta.

Se ha concluido el estudio de esta primera unidad, siempre le recomiendo revisar lo recomendado hasta que domine el tema en particular y detalles que usted confirma necesita mejorar y así conocer su nivel de conocimientos.

Estoy seguro de que le irá ¡muy bien!

Resultado de aprendizaje 2

Utiliza la abstracción como una habilidad adquirida para sintetizar y analizar situaciones propuestas.

Por medio de este resultado de aprendizaje, usted llegará a resolver ejercicios con signos de agrupación, reconocerá e intervendrá para eliminar denominadores y convertir una expresión simple en sus factores.

Dominar y conocer los casos para factorar aplicando metodologías específicas englobados en los casos pertinentes y una vez determinado la situación será capaz de simplificar expresiones inclusive complejas desde una simple suma algébrica hasta convertirlo en su producto equivalente.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje

Semana 2

1.5 Elimninación de signos de agrupación

Los signos de agrupación son paréntesis, corchetes y llaves y para simplificar se deben eliminar estos símbolos, mediante el siguiente proceso:

Ejemplo 6

Sinplifique la expresión $4\{2x[3+2x]+2[4x^2-(1-4x)]\}$,

Elimine los signos de agrupación más internos, que pueden ser los paréntesis, asi:

$$4\{2x[3+2x]+2[4x^2-\mathbf{(1-4x)}]\},$$

$$4\{2x[3+2x]+2[4x^2-1+4x]\},$$

Luego continúe con los corchetes

$$4\{2x[\mathbf{3+2x}]+2[\mathbf{4x^2-1+4x}]\},$$

$$4\{6x+4x^2+8x^2-2+8x\},$$

Finalmente las llaves debe eliminarlas

$$4\{\mathbf{6x+4x^2+8x^2-2+8x}\}$$

$$24x+16x^2+32x^2-8+32x$$

Se reducen términos semejantes

$$\mathbf{48x^2+56x-8}, \quad \text{Rta.}$$

Ejemplo 7

Sinplifique la expresión $-5\{2x^2(x+1)-4[x^2-(3-2x)]\}$,

Elimine los signos de agrupación más internos, que pueden ser los paréntesis, asi:

$$-5\{2x^3+2x^2-4[x^2-3+2x]\},$$

Se aplicó la propiedad distributiva

$$-5\{2x^3+2x^2-4x^2+12-8x\},$$

Se aplicó la propiedad distributiva

$$-10x^3-10x^2+20x^2-60+40x$$

Se aplicó la propiedad distributiva

$$-10x^3+10x^2+40x-60$$

Se reducen términos semejantes

$$\mathbf{-10x^3+10x^2+40x-60}\ , \quad \text{Rta.}$$

Ejemplo 8

Sinplifique la expresión $-\{-5[2a+2b-1]+5[a+2b]-a[2(b+1)]\}$

Elimine los signos de agrupación más internos, asi:

$$-\{-10a-10b+5+5a+10b-a[2b+2]\}$$

Se aplicó la propiedad distributiva

$$-\{-10a-10b+5+5a+10b-2ab-2a\}$$

Se aplicó la propiedad distributiva

$$10a+10b-5-5a-10b+2ab+2a$$

Se aplicó la propiedad distributiva

$$3a+2ab-5$$

Se reducen términos semejantes

$\mathbf{3a+2ab-5}$, Rta.

Ejemplo 9

Sinplifique la expresión $5(x^2-y^2)+x(y-3x)-4y(2x+7y)$

$$5x^2-5y^2+xy-3x^2-8xy-28y^2$$

Propiedad distributiva

$$2x^2-7xy-33y^2$$

Se reducen términos semejantes

$\mathbf{2x^2-7xy-33y^2}$, Rta.

Ejemplo 10

Sinplifique la expresión $-5\{4x^2(2x+2)-2[x^2-(5-2x)]\}$

$$-5\{8x^3+8x^2-2x^2-2[x^2-5+2x]\}$$

Elimine los signos de agrupación y aplique propiedad distributiva

$$-5\{8x^3+8x^2-2x^2-2x^2+10-4x\}$$

Otra vez propiedad distributiva

$$-40x^3-40x^2+10x^2+10x^2-50+20x$$

Reducir los términos semejantes

$\mathbf{-40x^3-20x^2+20x-50}$, Rta.

Ejemplos resueltos paso a paso con operaciones básicas con polinomios lo encontrará en su texto básico entre las páginas 14 y

1.6 Factorización

Si dos o más expresiones algebraicas se multiplican, estas son factores y son el producto.

El proceso de convertir una suma algébrica dada, en una expresión dada como el producto de factores se denomina factorización de la expresión, se examinarán ciertos métodos para factorizar expresiones:

Reglas de Factorización	
$xy + xz = x(y+z)$	Factor común
$x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$	Trinomio cuadrado perfecto
$abx^2 + (ab+cd)x + cd = (ax+c)(bx+d)$	
$x^2 + 2ax + a^2 = (x+a)^2$	Trinomio cuadrado perfecto
$x^2 - 2ax + a^2 = (x-a)^2$	Trinomio cuadrado perfecto
$x^2 - a^2 = (x+a)(x-a)$	Diferencia de cuadrados
$x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3 = (x+a)^3$	Suma de cubos
$x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3 = (x-a)^3$	Diferencia de cubos

Figura 2. *Reglas de Factorización*

Elaborado por:Espinosa. K, (2022), Guía Didáctica Matemática, Quito: ISTHCPP

1.7 Factor común

Existe cuando en todos los términos de un polinomio se repiten una o más letras, o los coeficientes numéricos contienen algún factor que es común para todos ellos.

$$48abc - 24ab^2 + 12a^2bcd + 6abcde$$

Para su factorización tomamos el coeficiente numérico de menor valor (6 en este caso), porque se encuentra contenido en el resto de términos, y las letras a y b que son comunes en todo el polinomio, con lo que obtenemos lo siguiente:

$$6ab(8c - 4b + 2acd + cde)$$

Recuerda:
En factor común usted también puede agrupar uno o varios términos para optar por este tipo de factorización.

Ejemplo 14

Factore la expresión $3ab - bc + 3am - mc$

Deberá agrupar los términos que son factores comunnes, con la condición de que estos grupos deberán ser de igual número de términos, luego en cada grupo aplicar el procedimiento:

$$(3ab - bc) + (3am - mc)$$

Agrupe en dos binomios que tengan factores comunes

$$b(3a - c) + m(3a - c)$$

Propiedad distributiva a la inverza

$$(3a - c)(b + m)$$

Propiedad distributiva a la inverza

$$\boldsymbol{(3a - c)(b + m)}, \quad \text{Rta.}$$

Otra manera de agrupar es:

$$(3ab + 3am) - (bc + mc)$$

Agrupe en dos binomios que tengan factores comunes

$$3a(b + m) - c(b + m)$$

Propiedad distributiva a la inverza

$$(b + m)(3a - c)$$

Propiedad distributiva a la inverza

$$\boldsymbol{(b + m)(3a - c)} \quad \boldsymbol{Rta.}$$

El resultado es el mismo en ambos procedimientos, ¿verdad?, entonces desarrolle ejercicios, encontrará de este tipo en el texto básico, capítulo 0, páginas 20 y 21 y su resultado al final del texto. ¡Éxitos en su resolución!

1.8 Diferencia de cuadrados

Concidere que en la teoría de los productos notables consta la diferencia de cuadrados, misma que factorizada nos da el producto de la suma por la diferencia de sus raíces cuadradas.

Ejemplo 15

Factore la expresión $9a^2b^4 - \frac{4}{81}m^2$

Reconoce que es una diferencia de cuadrados.

$\left(\mathbf{3ab^2 - \frac{2}{9}m}\right)\left(\mathbf{3ab^2 + \frac{2}{9}m}\right)$, Rta.

Un caso particular de analizar es la factorización de suma o diferencia de cubos, para lo que se debe tener en cuenta lo siguiente:

$$\mathbf{a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)}$$

$$\mathbf{a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)}$$

Ejemplo 16

$$64x^3 - y^3 = (4x - y)(16x^2 + 4xy + y^2)$$

$$\mathbf{(4x - y)(16x^2 + 4xy + y^2)} \quad \text{Rta.}$$

¡Listo!, ahora ya puede revisar más ejemplos de factorización.

1.9 Trinomios

Los trinomios cuadrados perfectos, por ejemplo, están conformados por dos términos que son cuadrados perfectos y positivos, el tercer término corresponde al doble producto de las raíces de los dos anteriores.

Ejemplo 17

Factore la expresión $9a^2 - 12ab + 4b^2$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$3a \qquad\qquad 2b$$

$$2(3a)(2b) = 12ab$$

Las raíces de los dos términos que son cuadrados perfectos positivos las elevamos al cuadrado, considerando el signo del término que corresponde al doble producto de estas raíces, de esta manera obtenemos el resultado.

$$\mathbf{9a^2 - 12ab + 4b^2 = (3a - 2b)^2} \quad \text{Rta.}$$

Pero existen trinomios que no poseer estas características, para los cuales el procedimiento es diferente, como los que cuyo resultado sean dos factores:

Recuerde:
Tome en cuenta que el coeficiente cuadrático siempre será "1".

Caso 1:

Ejemplo 18

Factore la expresión $a^2 - 5a + 6$

$$1a^2 - 5a + 6$$

Deberá encontrar dos factores del término constante "6", y que además sumados algebraicamente den el coeficiente de "a" esto es "-5".

Estos factores son -2 y -3:

$$6 = (-2)(-3) \rightarrow \textit{Término constante.}$$

$$-5 = (-2) + (-3) \rightarrow \textit{Coeficiente de } \text{a.}$$

Se divide al primer término en dos grupos y se le agrega los términos encontrados:

$$\boldsymbol{a^2 - 5a + 6 = (x - 2)(x - 3) \quad Rta.}$$

Caso 2:

Recuerde:
Tome en cuenta que el coeficiente cuadrático será diferente de "1".

Ejemplo 19

Factore la expresión $3a^2 + 11a + 6$

$$3 \neq 1$$

$$3a^2 + 11a + 6$$

Deberá multiplicar el coeficiente del término cuadrático por el término constante asi:

3(6) = 18

Se busca dos factores que resulte 18 y que además sumados algebraicamente den el coeficiente de "a" esto es "11". Estos factores son 9 y 2:

$$18 = (9)(2) \rightarrow \text{Multiplicados.}$$

$$11 = 9 + 2 \rightarrow \text{Sumados.}$$

Se reemplaza el coeficiente del segundo término por los dos factores encontrados

$$3a^2 + (9 + 2)a + 6$$

Aplique la propiedad y elimine el signo de agrupación.

$$3a^2 + 9a + 2a + 6$$

Agrupe los términos para que puedan ser factorados por factor comíun.

$$(3a^2 + 9a) + (2a + 6)$$

Aplique factor común las veces que sean necesarias.

$$3a(a + 3) + 2(a + 3)$$

$$\boldsymbol{(a + 3)(3a + 2)} \quad \boldsymbol{Rta.}$$

¡Listo!,¿El procedimiento le ha resultado complicado? Veamos entonces otra manera de factorar estos trinomios.

Ejemplo 20

Factore la expresión $4x^2 + 8\text{x} + 3$

Deberá multiplicar a todo el polinomio por el coeficiente del término cuadrático y se divide para el mismo, así no se altera la expresión.

$$4x^2 + 8\text{x} + 3 = \frac{4(x^2 + 8x + 3)}{4} = \frac{(4x)^2 + 8(4x) + 4(3)}{4}$$

Busque dos números que multiplicados de 4(3) = 12, y sumados algebricamente de 8, que es el coeficiente de "x". asi:

$$\frac{(4x)^2 + 8(4x) + 4(3)}{4}$$

$$= \frac{(4x)^2 + 8(4x) + 12}{4} = \frac{(4x + 6)(4x + 2)}{4}$$

Factor común en cada parêntesis

$$\frac{2(2x + 3)2(2x + 1)}{4}$$

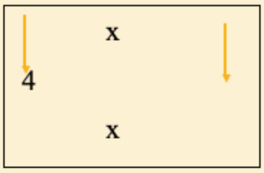
Sinplifique y termina asi:

$$\boldsymbol{(2x + 3)(2x + 1)} \quad \boldsymbol{Rta.}$$

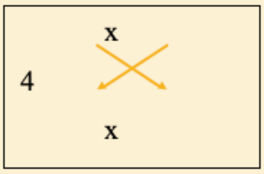
Ejemplo 21

Factore la expresión $x^2 + \mathrm{x} - 12$

Se buscan dos factores que al multiplicarse entre sí den como resultado el término constante y sumados lagebraicamente den como resultado el término de "x".



La suma del resultado de multiplicar en cruz ambos factores debe ser igual al segundo término:



$$-3x^2 + 4x = x$$

"x" es el segundo término del trinomio.

El resultado se encontrará expresado por la multiplicación de factores encontrados asi:

$$\boldsymbol{(x+3)(x-3)} \quad \boldsymbol{Rta.}$$

¡Listo!, ejercicios complementarios sobre factoreo le puedes encontrar en el Ejercicio 0,7 del Texto básico en la página 25.

A continuación, le invito a desarrollar la siguiente autoevaluación, cuyo objetivo es conocer cuánto usted ha comprendido del tema, además podrá revisar en la sección del solucionario, la retroalimentación de cada pregunta.

Se ha concluido el estudio de esta primera unidad, siempre le recomiendo revisar lo recomendado hasta que domine el tema en particular y detalles que usted confirma necesita mejorar y así conocer su nivel de conocimientos.

Seguro le irá bien.

Autoevaluación 1.2

Lea y responda en el espacio entre paréntesis si es verdadera con "V" o falsa con "F".

1.-	( )	*Los productos de* $x^2 - 9y^2$, *son:* $(x-3y)(x-3y)$
2.-	( )	El valor de la expresión $\frac{4x^2-16}{2x+4} = 2x - 4$.
3.-	( )	Factorada la expresión: $2x^5 + 4x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 2x$, *los factores son:* $2x(x^4 + 2x^3 - x^2 + 3x - 1)$
4.-	( )	*Los factores de* $x^4 + 13x^2 + 30$, *son:* $(x+3)(10+x)$
5.-	( )	Al racionalizar la siguiente expresión: $\left[\frac{(1+i)^m-1}{\sqrt{2}}\right]$; *el resultado es:* $\sqrt{2}\left[\frac{(1+i)^m-1}{2}\right]$;
6.-	( )	*El congujado de* $2\sqrt{x} - \sqrt{yz}$, *es* $\sqrt{yz} + 2\sqrt{x}$
7.-	( )	Los factores siguientes: $(a-b)(a-b)$, *provienen de:* $a^2 - 2ab + b^2$.
8.-	( )	*La expresión:* $(a+b+c) - x(a+b+c) - (c+a+b)y$, *es igual a:* $(1-x-y)(a+b+c)$
9.-	( )	*La expresión:* $(a+1)^3 - 8$, *es equivalente a:* $(a-1)((a+1)^2 + 2(a+1) + 4)$
10.-	( )	La expresión siguiente: $\frac{4}{a^2} - \frac{1}{b^2}$, *tiene como factores:* $\left(\frac{2}{a} - \frac{1}{b}\right)\left(\frac{2}{a} + \frac{1}{b}\right)$

Verifique sus respuestas en el solucionario que se encuentra al final de la presente guía didáctica.

"Las matemáticas son el lenguaje son el idioma que uso Dios para escribir el mundo"
Galileo Galilei

¡¡Éxitos en la tarea que ha emprendido!!

Ir al solucionario

Resultado de aprendizaje 3

Utiliza la abstracción como una habilidad adquirida para sintetizar y analizar situaciones propuestas.

En este resultado de aprendizaje, usted llegará a identificar polinomios y resolver ejercicios con signos de agrupación en los que se involucre la suma y resta de los mismos.

Dominará la metodología básica que a partir de operaciones básicas determinará garantizando que domina operaciones complementarias como la multiplicación y división de polinomios desde propuestas básicas hasta complejas.

Se pondrá especial atención a la división larga de polinomios y sus especificaciones iniciales para poder realizarlas.

Finalmente, con el conocimiento previo del factoreo del contenido anterior, reconocerá e intervendrá para eliminar denominadores y convertir expresiones racionales en simples y mínimas logrando simplificarlas.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje

Unidad 2. Operaciones Algebraicas

Semana 3

2. Operaciones algebraicas

2.1 Suma y resta de polinomios

La Suma y resta de polinomios o expresiones polinómicas se deben simplificar cuando se identifican términos semejantes es decir aquellos que tienen la misma parte literal. Estos son ejemplos:

$$2a + a + b - 3b + 3a + 6b$$

Agrupe los términos semejantes por esta vez:

$$2a + a + 3a + b - 3b + 6b$$

$$\mathbf{6a + 4b}, \quad \text{Rta.}$$

Ejemplo 22

Simplifique el siguiente ejercicio:

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} - x - y$$

Se agrupan términos semejantes:

$$\frac{x}{2} - x + \frac{y}{3} - y$$

Se suma algebricamente

$$-\frac{x}{2} - \frac{2y}{3}, \quad \textit{Rta.}$$

Recuerda:
Cuando se suman algebraicamente términos con el mismo signo se deberá SUMAR y la respuesta conserva el signo del número mayor o más alto.

Recuerda:
Cuando se suman algebraicamente términos con signo diferente se deberá RESTAR y la respuesta conserva el signo del número mayor o más alto.

2.2 Multiplicación y división

La multiplicación y división de polinomios o expresiones polinómicas se deben simplificar factorando siempre y cuando sea posible y luego se identifican términos semejantes es decir aquellos que tienen la misma parte literal. Estos son ejemplos simples:

$$\frac{2(a+1)}{4}\frac{(a-2)}{a^2-1}$$

puede factorar y sinplificar:

$$\frac{\cancel{2(a+1)}}{\cancel{4}}\frac{(a-2)}{\cancel{(a+1)}(a-1)}$$

$$\frac{\mathbf{1\,(a-2)}}{\mathbf{2\,(a-1)}},\quad \boldsymbol{Rta.}$$

Recuerda:
Multiplicar numerador y denominador entre si, y aplicar las reglas de los signos de la multiplicación.

2.3 Productos especiales

Existen ciertos productos especiales que pueden obtenerse a partir de la propiedad distributiva y son útiles al multiplicar expresiones algebraicas. A continuación se presentarán algunos casos especiales:

Productos Especiales	
$x(y+z)=xy+xz$	Propiedad distributiva
$(x+a)(x+b)=x^2(a+b)x+ab$	
$(ax+c)(bx+d)=abx^2+(ab+cd)x+cd$	
$(x+a)^2=x^2+2ax+a^2$	Binomio al cuadrado
$(x-a)^2=x^2-2ax+a^2$	Binomio al cuadrado
$(x+a)(x-a)=x^2-a^2$	Producto de la suma y diferencia
$(x+a)^3=x^3+3ax^2+3a^2x+a^3$	Binomio al cubo
$(x-a)^3=x^3-3ax^2+3a^2x-a^3$	Binomio al cubo

Figura 2. *Prouctos Especiales*

Elaborado por.Espinosa. K, (2022), Guía Didáctica Matemática, Quito: ISTHCPP

Ejemplo 23

Aplique una de las reglas dadas y resuelva el ejercicio: $(3x+2)^3$

$$= (3x)^3 + 3(2)(3x)^2 + 3(2)^2(3x) + (2)^3$$

Se aplicó la regla 7, un binomio al cubo.

$$= \mathbf{27x^3 + 54x^2 + 36x + 8}, \quad \textbf{\textit{Rta.}}$$

Recuerde:
Solo existen 8 reglas para solucionar un producto especial.

¡Listo!,¿La aplicación de estas reglas las puede encontrar en las páginas 16 y17 de su texto básico, existen varios ejemplos desarrollados sobre el tema?

2.4 Expresiones racionales

Una expresión racional es una combinación de variables y constantes de la forma:

$$\frac{a(x)}{b(x)}$$

$$\text{Donde } a(x)\ y\ b(x), son\ polinomios\ cualquiera\ y\ b(x) \neq 0.$$

Dado que las variables incluidas en las expresiones algebraicas representan números reales, las propiedades se aplican también a las expresiones algebraicas. A continuación se presenta la solución más común con este tipo:

2.4.1 Simplificación de expresiones racionales

Una expresión racional está simplificada cuando ha sido reducida a su mínima expresión, esto es cuando el numerador y el denominador no tienen factores comunes distintos de 1 y -1.

Ejemplo 24

Simplifique la siguiente expresión algebraica:

$$\frac{4x^2 - 20x + 24}{6 + 10x - 4x^2}$$

Ordane los polinomios de ser necesario:

$$\frac{4x^2 - 20x + 24}{-4x^2 + 10x + 6} = \frac{4(x^2 - 5x + 6)}{-2(2x^2 - 5x - 3)}$$

Factore por completo numerador y denominador:

$$\frac{\cancel{4}(x-2)\cancel{(x-3)}}{\cancel{-2}(2x+1)\cancel{(x-3)}}$$

Simplifique factores y términos comunes:

$$\frac{2(x-2)}{-(2x+1)}$$

Se puede pocisionar el signo negativo al numerador o al inicio de la fracción asi:

$$\frac{-2(x-2)}{(2x+1)} = -\frac{2(x-2)}{(2x+1)} \quad \textit{Rta.}$$

Los ejemplos que se encuentran en la página 21, 22 y 23 de su texto base, le ayudarán a resolver ejercicios un poco más complejos, cuide al simplificar.

2.5 Multiplicación y división de expresiones racionales

Este tema será tratado en forma separada, acompañado de los ejemplos respectivos.

2.4.1 Multiplicación de expresiones racionales

En la multiplicación de expresiones algebraicas racionales, se debe multiplicar numeradores y denominadores entre si. Para facilitar este proceso puede iniciar simplificando, si es posible, los factores comunes que se presenten.

Autoevaluación 2.3

Lea y responda en el espacio entre paréntesis si es verdadera con “V” o falsa con “F”.

1.-	( )	$Los\ productos\ de\ x^2 - 9y^2, son: (x-3y)(x-3y)$
2.-	( )	El valor de la expresión $\frac{4x^2-16}{2x+4} = 2x-4$.
3.-	( )	De la expresión: $2x^5 + 4x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 2x,\ los\ factores\ son:$ $2x(x^4 + 2x^3 - x^2 + 3x - 1)$
4.-	( )	$Los\ factores\ de\ x^4 + 13x^2 + 30, son: (x+3)(10+x)$
5.-	( )	Al racionalizar la siguiente expresión: $\left[\frac{(1+i)^m-1}{\sqrt{2}}\right]; el\ resultado\ es: \sqrt{2}\left[\frac{(1+i)^m-1}{2}\right];$
6.-	( )	$El\ congujado\ de\ 2\sqrt{x} - \sqrt{yz}, es\ \sqrt{yz} + 2\sqrt{x}$
7.-	( )	Los factores siguientes: $(a-b)(a-b), provienen\ de: a^2 - 2ab + b^2$.
8.-	( )	$La\ expresión: (a+b+c) - x(a+b+c) - (c+a+b)y, es\ igual\ a:$ $(1-x-y)(a+b+c)$
9.-	( )	$La\ expresión: (a+1)^3 - 8, es\ equivalente\ a:$ $(a-1)((a+1)^2 + 2(a+1) + 4)$
10.-	( )	La expresión siguiente: $\frac{4}{a^2} - \frac{1}{b^2}, tiene\ como\ factores:$ $\left(\frac{2}{a} - \frac{1}{b}\right)\left(\frac{2}{a} + \frac{1}{b}\right)$

Verifique sus respuestas en el solucionario al final de la presente guía didáctica.

“Las matemáticas puras son, en su forma, la poesía de las ideas lógicas”

Albert Einstein

¡¡Éxitos en la tarea que ha emprendido!!

Ir al solucionario

Resultado de aprendizaje 4	Utiliza la abstracción como una habilidad adquirida para sintetizar y analizar situaciones propuestas.

Con este resultado de aprendizaje, usted llegará a identificar expresiones y resolver ejercicios estimados y considerados como fracciones o expresiones racionales que involucran todas las operaciones básicas, esto es suma, resta, multiplicación y división.

Conocerá y dominará la metodología que a partir de operaciones básicas determinará garantizando que domina la simplificación por cualquier método aprendido, añadiendo ahora la eliminación de denominadores con radicales.

La racionalización de polinomios a partir de sus denominadores para simplificar aún mas expresiones de difícil resolución, como son el caso de expresiones con literales y aquellas que traen implícitas expresiones de simplificación previa por factoreo.

Finalmente, con el conocimiento de la racionalización de binomios y el conjugado llegar a eliminar cantidades radicales y reemplazarlas con otras equivalentes que permitan mejor su interpretación y aplicación futura.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje

Semana 4

2.6 División larga

Una vez que usted ha comprendido el procedimiento para dividir un multinomio entre un monomio, se encontrará apto para de realizar divisiones entre polinomios o división larga, a continuación estudie el procedimiento para su resolución:

Ejemplo 27

Divida la siguiente expresión algebraica:

$$(3x^2 - 4x + 3) \div (3x + 2)$$

Ordene los dividendos en forma decreciente respecto de una variable, si el polinomio está incompleto es conveniente dejar un espacio en blanco.

$$\begin{array}{rl|l} 3x^2 - 4x + 3 & & 3x + 2 \\ \hline -3x^2 - 2x & & x - 2 \\ - 6x + 3 & & \\ - 6x + 4 & & \\ 7 & & \end{array}$$

El resultado queda expresado de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{x - 2 + \frac{7}{3x + 2}} \quad \textbf{\textit{Rta.}}$$

Ejemplo 28

Divida la siguiente expresión algebraica:

$$x^4 + 2x^2 + 1 \div x - 1$$

Se debe ordenar los polinomios y efectivamente lo están.

Deje los espacios de aquellos términos que no constan inicialmente pero que podrán aparecer a medida que el procedimiento avance.

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & & +2x^2 & & +1 & x-1 \\ \cline{6-6}
-x^4 & +x^3 & & & & x^3+x^2+3x+3 \\ \cline{1-5}
 & x^3 & +2x^2 & + & +1 & \\
 & -x^3 & +x^2 & & & \\ \cline{1-5}
 & & 3x^2 & & +1 & \\
 & & -3x^2 & +3x & & \\ \cline{1-5}
 & & & 3x & +1 & \\
 & & & -3x & +3 & \\ \cline{1-5}
 & & & & 4 &
\end{array}
$$

El resultado queda expresado de la siguiente manera:

$$x^3 + x^2 + 3x + 3 + \frac{4}{x-1} \quad Rta.$$

Ejemplo 29

Divida la siguiente expresión algebraica:

$$\frac{\dfrac{4x}{x^2-1}}{\dfrac{2x^2+8x}{x-1}} = \frac{4x}{(x^2-1)} \frac{(x-1)}{(2x^2+8x)} = \frac{4x(x-1)}{[(x+1)(x-1)][2x(x+4)]}$$

Se factora y simplifica asi:

$$\frac{2}{(x+1)(x+4)}, \quad Rta.$$

Ejemplo 30

Simplifique el ejercicio siguinete:

$$\frac{t}{3t+2} - \frac{4}{t-1} = \frac{t(3t+2)(t-1)}{(3t+2)} - \frac{4(3t+2)(t-1)}{(t-1)}$$

Multiplicandot todo el denominador a todos los términos en el numerador

Se factora y simplifica asi:

$$t(t-1)4(3t+2)$$

Multiplicando o aplicando la propiedad distributiva:

$$(t^2-t)(12t+8)$$

$$12t^3-12t^2+8t^2-8t$$

Se resuelven términos semejantes asi:

$$12t^3-4t^2-8t$$

$$\mathbf{4t(3t^2-t-8)}, \quad \boldsymbol{Rta.}$$

Recuerde:
Para dividir polinomios es preferible factorar denominadores y conseguir eliminarlos al multiplicar el máximo común divisor a cada numerador de cada término.

El ejercicio 0.8 reúne varios ejemplos con grado de complejidad mayor y variado que le ayudará a mejorar la simplificación, ponga especial atención a los ejemplos 49 y 50.

En esta Unidad, se ha recordado a los números reales las operaciones básicas con polinomios, conocimientos que usted adquirió en el bachillerato.
Resuelva la autoevaluación y si sus respuestas coinciden con las que se encuentran al final ¡Congratulaciones!` significa que se encuentra en condiciones de desarrollar la evaluación a distancia que corresponda al primer bimestre.

Racionalización de denominadores

A eliminar los radicales de los denominadores se le denomina “Racionalizar”, el resultado será una fracción equivalente donde el denominador ya no tiene radical.

2.6.1 Racionalización del tipo $\frac{a}{\sqrt[n]{b}}, \boldsymbol{para\ b > 0}$

En este caso es eliminar el radical del denominador cuando es un monomio.

Ejercicios complementarios los puede encontrar en el ejercicio 0,5 de su texto básico, los ejemplos 59 al 68 de la página 16.

Ejemplo 11

Racionalize la siguiente expresión algebraica:

$$\frac{2}{\sqrt{3}}$$

Se multiplica al numerador y denominador el valor del radical asi:

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}\right)^{2}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Simplifique el radical y la respusta es:

$$\boldsymbol{\frac{2\sqrt{3}}{3}} \quad \boldsymbol{Rta.}$$

Ejemplo 12

Racionalize la siguiente expresión algebraica:

$$\frac{2}{\sqrt[6]{3x^5}}$$

Es conveniente expresar la expresión en exponenetes fraccionarios.

$$\frac{2}{3^{\frac{1}{6}}x^{\frac{5}{6}}}$$

Se multiplica al numerador y denominador una fracción que permita quedar elevado a exponente "1" cada término del denominador a fin de eliminar el radical :

$$\frac{2}{3^{\frac{1}{6}}x^{\frac{5}{6}}}\frac{3^{\frac{5}{6}}x^{\frac{1}{6}}}{3^{\frac{5}{6}}x^{\frac{1}{6}}}=\frac{2}{3^{\frac{1}{6}}3^{\frac{5}{6}}}\frac{3^{\frac{5}{6}}x^{\frac{1}{6}}}{x^{\frac{5}{6}}x^{\frac{1}{6}}}=\frac{2}{3}\frac{3^{\frac{5}{6}}x^{\frac{1}{6}}}{x}$$

Asocie de mejor manera el numerador:

$$\frac{2(3^5x)^{\frac{1}{6}}}{3x}$$

Regresando a expresar como radical:

$$\boldsymbol{\frac{2\sqrt[6]{3^5x}}{3x}}, \quad \boldsymbol{Rta.}$$

2.6.2 Racionalización del tipo $\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$

Este tipo de expresiones poseen en el denominador binomios con radicales, el proceso a seguir es multiplicar el numerador y el denominador por el "conjugado" del denominador.

Recuerda:
El conjugado es el binomio del denominador cambiado de signo así, $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ como denominador tiene como conjugado $\sqrt{a}-\sqrt{b}$

Ejemplo 13

Racionalize la siguiente expresión algebraica:

$$\frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$$

El conjugado del denominador $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ es, $\sqrt{2}-\sqrt{3}$

$$\frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$$

Se multiplica al numerador y denominador por el conjugado y se obtiene:

$$\frac{2(\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2}$$

El denominador se convierte en una diferencia de cuadrados, por la propiedad 6 de los "productos especiales". Además la ley 17 de las "Leyes de los exponentes y radicales".

$$\frac{2(\sqrt{2}-\sqrt{3})}{2-3} = \frac{2(\sqrt{2}-\sqrt{3})}{-1} = \frac{(-1)2(\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(-1)(-1)}$$

Se puede multiplicar por -1 al numerador y denominador y expresar la respuesta asi:

$$-2(\sqrt{2}-\sqrt{3}) \quad \textit{Rta.}$$

Recuerda:
La finalidad de la racionalización de binomios con radicales conlleva a obtener una diferencia de cuadrados que permite eliminar los radicales.

Puede tener cierta dificultad su resolución, pero puedes ayudarte revisando el Ejemplo 4 en la página 28 de su Texto básico.

2.7 Simplificación de expresiones fraccionarias y literales

Para resolver este tipo de ejercicios, bastará con dividir cada término del multinomio por el monomio.

Recuerde:
Para dividir un polinomio, el grado del divisor debe ser menor o igual que el del dividendo.

Ejemplo 26

Simplifique la siguiente expresión algebraica:

$$\frac{40x^4y^5z^3 - 16x^3y^4z^3 + 32x^2y^3z^4}{-8x^2x^3z^2}$$

Cada término del numerador se divide para el denominador, con la propiedad distributiva asi::

$$\frac{40x^4y^5z^3}{-8x^2x^3z^2} - \frac{16x^3y^4z^3}{-8x^2x^3z^2} + \frac{32x^2y^3z^4}{-8x^2x^3z^2}$$

Divida cada una de las expresiones racionales formadas y simplifique cada fracción asi:

$$\boldsymbol{-5x^2y^2 + 2xyz - 4z^2} \quad \textit{Rta.}$$

Autoevaluación 2.4

Lea y responda en el espacio entre paréntesis si es verdadera con "V" o falsa con "F".

1.-	( )	*El cociente de dividir* x^2+3x *entre* x *es:* $3+x$
2.-	( )	El valor de la expresión $\frac{4z^3-8z^2+3z-6}{2z}$ *al dividirla es:* $2z^2-4z+\frac{3}{2}-\frac{3}{z}$.
3.-	( )	La respuesta de $(x+4)(x+5)$ es: $20-9x-x^2$
4.-	( )	*Al dividir* x^3-2 *entre* x, *el cociente es:* $x^2-\frac{2}{x}$
5.-	( )	Al dividir la siguiente expresión: $\left[\frac{2x^3-14x-5}{x-3}\right]$; *el cociente es:* $2x^2+6x+4+\frac{7}{x-3}$
6.-	( )	*El producto* x^2+9+6x, *proviene de* $(x+3)^2$
7.-	( )	Los factores siguientes: $(a-b)(a-b)$, *provienen de:* $a^2-2ab+b^2$
8.-	( )	*La expresión:* $(a+b+c)$ *entre* $(b+a+c)$ *es cero.*
9.-	( )	*Dividir* t^2 *entre* $(t-8)$ *da como cociente:* $t-8$
10.-	( )	$t+2$ *es el cociente de dividir:* $\frac{t^2-2^2}{t-2}$

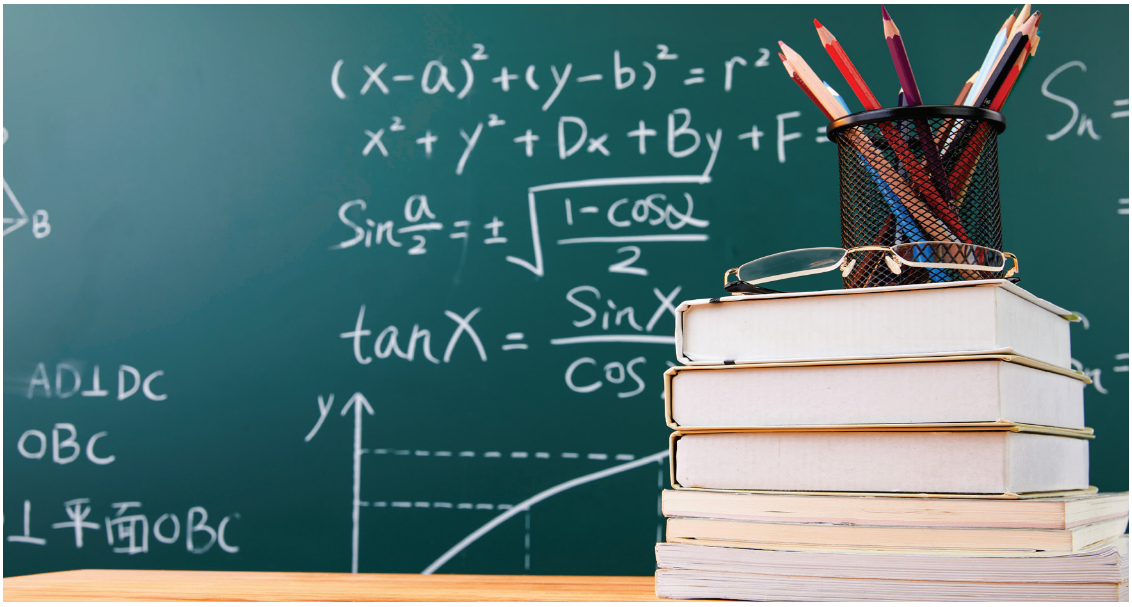
Verifique sus respuestas en el solucionario al final de la presente guía didáctica.

"Las matemáticas parecen dotar a uno de nuevo sentido"

Charles Darwin

¡¡Éxitos en la tarea que ha emprendido!!

Ir al solucionario



Resultado de aprendizaje 5

Participa efectiva y frecuentemente en grupos de trabajo, proponiendo soluciones en metodologías cuantitativas.

En esta semana usted llegará a identificar expresiones denominadas ecuaciones de carácter lineal, esto es aquellas que no presentan mas grado que el primero en la variable y llegar a resolver ejercicios estimados y considerados como ecuaciones que conllevan expresiones racionales a simplificar.

Conocerá y dominará la metodología que a partir de operaciones básicas determinará garantizando que domina la resolución de ecuaciones y encuentra el valor de la incógnita por cualquier método aprendido, añadiendo ahora la eliminación de denominadores con radicales.

La eliminación de polinomios o monomios en denominadores para simplificar aún mas expresiones de difícil resolución, como son el caso de expresiones con literales y aquellas que traen implícitas expresiones de simplificación previa por factoreo.

Finalmente, con el conocimiento de la metodología de resolución de ecuaciones con literales y aún con mas complejidad cuando conlleva expresiones racionales, con otras equivalentes que permitan mejor su resolución y aplicación futura.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje

3. Ecuaciones y desigualdades

Una ecuación es una proposición que indica que dos expresiones son iguales. Las dos expresiones que conforman una ecuación son llamadas sus lados o miembros, y están separadas por el signo de igualdad “=”.

Le recomiendo leer la sección introductoria a Ecuaciones de su Texto básico en la página 35.

3.1 Ecuaciones

Resolver una ecuación puede implicar la realización de operaciones en ella. Es preferible que al aplicar cualquiera de tales operaciones se obtenga otra ecuación con exactamente las mismas soluciones que la ecuación original. Cuando esto ocurre, se dice que las ecuaciones son equivalentes. Una ecuación además tiene incógnitas que generalmente son las últimas letras del alfabeto “x, y, z, t, w, ...” y números o las primereas letras del alfabeto que se las considerará constantes.

Existen tres operaciones que garantizan la equivalencia:

1. 1. Sumar (o restar) el mismo polinomio en ambos miembros de una ecuación.
2. Multiplicar (dividir) ambos miembros de una ecuación por la mism- constante, excepto el cero.
3. Reemplazar cualquiera de los miembros de una ecuación por una expresión igual (equivalente).

3.2 Ecuaciones lineales

Se caracterizan por tener una variable, misma que deberá estar elevada a la primera potencia. El modelo es el siguiente:

$$ax + b = 0$$

a y b son constantes y $a \neq 0$

x es la variable o incógnita.

Una ecuación lineal también se conoce como ecuación de primer grado o ecuación de grado uno, ya que la potencia más alta de la variable que aparece en la ecuación es la primera.

Ejemplo 31

Resolución de la siguiente ecuación lineal:

$$8x + 2 = 4x$$

Pasar los términos que contienen la variable a uno de los miembros en este caso a la izquierda:

$$8x - 4x = -2$$

Siempre que un término cambie de lugar en el miembro, debe cambiar a su operación complementaria si es suma a resta, si es multiplicación a división y viceberza.

$$4x = -2$$

$X=\frac{-2}{4}$

$$x = \frac{-1}{2}, \quad Rta.$$

Ejemplo 32

Resolución de la siguiente ecuación lineal:

$$2(x + 4) = 6x + 2$$

Aplicando la propiedad distibutiva

2x+8=6x+2

Pasar los términos que contienen la variable a uno de los miembros en este caso a la izquierda:

$$2x - 6x = 2 - 8$$

$$-4x = -6$$

Para tornar positivo a los miembros se puede multiplicar en ambos lados por (-1), o si se dividen términos con iguales signos la respuesta será positiva.

$$x = \frac{-6}{-4}$$

$$x = \frac{3}{2}, \quad Rta.$$

Recuerde:
Un término que cambie la posición a otro miembro deberá hacerlo con su operación complementaria.

Al ser una ecuación lineal o de grado "1", entrega una sola respuesta como solución de una ecuación lineal, fíjese en el ejemplo "5" de su Texto básico en la página 40.

3.3 Ecuaciones con literales

Las ecuaciones en las que algunas de las constantes no están especificadas pero están representadas por letras, tales como a, b, c o d, se llaman ecuaciones con literales y las letras se conocen como constantes literales o constantes arbitrarias.

Por ejemplo, en la ecuación con literales x + a = 4b, podemos considerar a a y b como constantes arbitrarias. Las fórmulas como I = Prt, que expresan una relación entre ciertas cantidades, pueden considerarse como ecuaciones con literales. Si queremos expresar una letra en particular en términos de las otras, esta letra es considerada la incógnita.

Ejemplo 33

Resolución de la siguiente ecuación lineal:

$$x(a+c)+x^2 = (x+a)^2$$

Aplicar la propiedad distributiva y el binomio al cuadrado, asi:

$$ax + ac + x^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

Transponeindo los tèrminos con "x" al primer miembro:

$$ax + x^2 - x^2 - 2ax = a^2 - ac$$

Reduzca términos semejantes y simplifique:

$$ax - 2ax = a^2 - ac$$

La variable es "x" y factorando se obtiene:

$$-ax = a(a-c)$$

Despejando la variable:

$$x = \frac{a(a-c)}{-a}$$

$$x = -(a-c)$$

$$\boldsymbol{x = c - a, \quad Rta.}$$

Recuerde:
Es conveniente aplicar la propiedad distributiva y empezar con signo positivo la respuesta. Póngale cuidado a la ley de signos para la multiplicación.

Mas ejemplos que le ayudarán a mejorar y fominar la resolución de ecuaciones lineales, fíjese en el Ejercicio 1,1 de su Texto básico en la página 41 y 42.

3.4 Ecuaciones fraccionarias

En esta sección,ilustramos que al resolver una ecuación no lineal puede suceder que ésta se reduzca a una ecuación lineal.Empezamos con una ecuación fraccionaria, que es una ecuación en que una incógnita está en un denominador.

Ejemplo 34

Resolución de la siguiente ecuación fraccionaria lineal:

$$\frac{3x+4}{x+2}-\frac{3x-5}{x-4}=\frac{12}{x^2-2x-8}$$

Asociar y factorar los denominadores a fin de encontrar el MCD máximo común divisor asi:

$$\frac{(3x+4)}{(x+2)}-\frac{(3x-5)}{(x-4)}=\frac{12}{(x-4)(x+2)}$$

Multiplicando a los numeradores el MCD se tiene:

$$\frac{(3x+4)\boldsymbol{(x-4)(x+2)}}{(x+2)}-\frac{(3x-5)\boldsymbol{(x-4)(x+2)}}{(x-4)}=\frac{12\boldsymbol{(x-4)(x+2)}}{(x-4)(x+2)}$$

Simplifique y se eliminan denominadores:

$$(3x+4)(x-4)-(3x-5)(x+2)=12$$

Propiedad distributiva nos queda:

$$3x^2-12x+4x-16-(3x^2+6x-5x-10)=12$$

Destruyendo el paréntesis:

$$3x^2-12x+4x-16-3x^2-6x+5x+10=12$$

Se elimina el término cuadrático y transponiendo términos semejantes tenemos:

$$-12x+4x-6x+5x=12+16-10$$

Reduzca términos semejantes:

$$-9x=18$$

Despejando la variable "x"

$$\boldsymbol{x=\frac{18}{-9}=-2,\quad Rta.}$$

Recuerde:
Una cantidad negativa en el denominador es equivalente a que la fracción sea negativa.

Mas ejemplos que le ayudarán a mejorar y fominar la resolución de ecuaciones lineales, fíjese en el Ejercicio 1,1 de su Texto básico en la página 41 y 42.

3.5 Ecuaciones con radicales

Una ecuación con radicales (ecuación radical) es aquélla en la que una incóg- nita aparece en un radicando. Los dos ejemplos siguientes ilustran las técnicas empleadas para resolver tales ecuaciones.

Ejemplo 35

Resolución de la siguiente ecuación lineal con radicales:

$$\sqrt{x^2+33}-x=3$$

Para resolver esta ecuación radical, elevamos ambos miembros a la misma potencia para eliminar el radical. Esta operación *no* garantiza la equivalencia, de modo que debemos verificar las "soluciones" resultantes. Empezamos aislando el radical en un lado. Después elevamos al cuadrado ambos lados y despejamos utilizando las técnicas comunes. Así,

$$\sqrt{x^2+33}=x+3$$

$$\left(\sqrt{x^2+33}^{\,2}\right)=(x+3)^2$$

$$x^2+33=x^2+6x+9$$

Se eliminan los términos cuadráticos:

$$-6x=9-33$$

Reduzca términos semejantes:

$$-6x=-24$$

$$\boldsymbol{x=\frac{-24}{-6}=4,\quad Rta.}$$

Mas ejemplos que le ayudarán a mejorar y fominar la resolución de ecuaciones lineales, fíjese en el Ejercicio 1,2 de su Texto básico en la página 47.

Se ha concluido el estudio de esta primera unidad, siempre revise el contenido hasta que domine el tema en particular y detalles que necesite mejorar acorde a su nivel de conocimientos.

A continuación, le invito a desarrollar la siguiente autoevaluación, cuyo objetivo es conocer cuánto usted ha comprendido del tema, además podrá revisar en la sección del solucionario, la retroalimentación de cada pregunta.

Autoevaluación 3.5

Lea y responda en el espacio entre paréntesis si es verdadera con “V” o falsa con “F”.

1.-	( )	*La ecuación* $2(x+4) = 7x + 2$, *tiene por respuesta:* $x = \frac{6}{5}$
2.-	( )	El valor de “2”, es la raíz o solución de la ecuación: $\frac{7x+3}{2} - \frac{9x-8}{4} = 6$.
3.-	( )	La ecuación: $S = P + Pqr$, *el valor de* "P" que satisface sería: P= $\frac{S}{1+qr}$
4.-	( )	*La ecuación:* $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 7$, *tiene por respuesta:* $x = \frac{42}{5}$
5.-	( )	Dada la ecuación: $\frac{3a+4}{a+2} - \frac{3a-5}{a-4} = \frac{12}{a^2-2a-8}$, *tiene por solución:* $a = -2$
6.-	( )	*Si la ecuación es:* $\frac{1}{x} + \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$, *el valor que satisface es* $x = 1$
7.-	( )	La ecuación: $\sqrt{5x-6} - 16 = 0$, *con radicales tiene por solución* $x = 2$.
8.-	( )	*Al resolver la ecuación:* $\frac{2}{x+q} = \frac{x}{q+x}$, *se tiene como respuesta:* $x = 2$
9.-	( )	*La ecuación:* $(a+1)^3 = \frac{1}{27}$, *tiene* $a = -\frac{2}{3}$, como respuesta.
10.-	( )	La ecuación: $\frac{1}{1+x} + \frac{2}{2+x} - \frac{3}{3+x} = 1$, *tiene de respuesta:* $x = \frac{1}{3}$

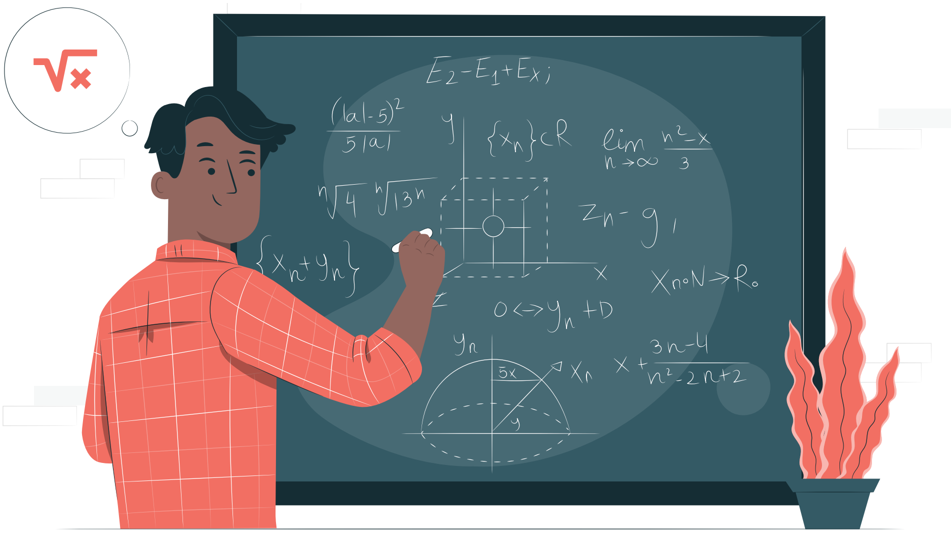
Verifique sus respuestas en el solucionario al final de la presente guía didáctica.

“La esencia de las matemáticas no es hacer las cosas simples complicadas, sino hacer las cosas complicadas simples”

S. Gudder

¡¡Éxitos en la tarea que ha emprendido!!

Ir al solucionario



Resultado de aprendizaje 6

Participa efectiva y frecuentemente en grupos de trabajo, proponiendo soluciones apoyadas en metodologías cuantitativas.

En esta semana usted llegará a identificar expresiones denominadas ecuaciones cuadráticas o de segundo grado, esto es aquellas que presentan un grado dos en la variable y llegar a resolver ejercicios estimados y considerados que conllevan expresiones racionales a simplificar.

Conocerá y dominará la metodología que a partir de operaciones básicas determinará garantizando que domina la resolución de ecuaciones y encuentra el valor de la incógnita por factoreo o la aplicación de la fórmula general o cualquier método aprendido, añadiendo ahora la eliminación de denominadores con radicales.

La eliminación de polinomios o monomios en denominadores para simplificar aún mas expresiones de difícil resolución, como son el caso de expresiones con literales y aquellas que traen implícitas expresiones de simplificación previa por factoreo.

Finalmente, con el conocimiento de la metodología de resolución de ecuaciones de segundo grado con literales y aún con mas complejidad cuando conlleva expresiones racionales, con otras equivalentes que permitan mejor su resolución especificando que éstas ahora son dos de las cuales usted reconocerá las soluciones reales y de aplicación futura.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje

Semana 6

3.6 Ecuaciones cuadráticas

Una ecuación cuadrática también se conoce como ecuación de segundo grado o ecuación de grado dos, ya que la potencia más grande que aparece en ella es la segunda, una ecuación cuadrática puede tener dos raíces o respuestas. Además una ecuación cuadrática responde a la forma:

$$ax^2 + \mathrm{bx} + \mathrm{c} = 0$$

Donde "x" es la variable "a, b y c" son constantes y a es diferente de cero, son ejemplos:

$$x^2 = 2$$

$$5 - x = x^2$$

$$a = (x + 1)^2$$

3.6.1 Solución por factoreo

Simplifique de ser posible,

Factore los términos de ser posible,

Despeje la variable.

Este método es útil cuando el ejercicio es factorable, de lo contrario el segundo método lo resolverá.

Ejemplo 36

Resolución de la siguiente ecuación cuadrática:

$$x^2 + x - 12 = 0$$

Es un trimomio que se deja factorar asi:

$$(x + 4)(x - 3) = 0$$

Cada paréntesis se iguala a cero:

$$x + 4 = 0, \qquad x - 3 = 0$$

$$\boldsymbol{x_1 = -4, \quad x_2 = 3, \quad Rta.}$$

Ejemplo 37

Resolución de la siguiente ecuación cuadrática:

$$x^2 = 3$$

Despejar la variable para que sea una diferencia de cuadrados y factorar asi:

$$x^2 - 3 = 0$$

$$(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$$

Igualando cada paréntesis a cero tenemos:

$$x - \sqrt{3} = 0, \qquad x + \sqrt{3} = 0$$

$$\boldsymbol{x_1 = -1,73205, \quad x_2 = 1.73205, \quad Rta.}$$

Recuerde:
Que siempre que se extrae una raíz cuadrada se tiene los dos signos en la respuesta. Una positiva y otra negativa.

Este método y ejemplos de aplicación lo puede encontrar en el Ejercicio 1.3 de su Texto básico en la página 53, los ejemplos del 1 al 30.

3.6.2 Solución por la Fórmula General

Es evidente que al tratar de resolver por factoreo la siguiente ecuación es imposible $0.7x^2 - 22x - 825 = 0$.

Sin embargo, existe una fórmula llamada *fórmula cuadrática* [5] que da las raíces de cualquier ecuación cuadrática, esta fórumula es:

$$\mathbf{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Donde a, b y c, son los coeficientes de la ecuación cradrática armada de la siguiente forma:

$$ax^2 + \mathrm{bx} + \mathrm{c} = 0$$

Ejemplo 38

Resolución de la siguiente ecuación cuadrática:

$$4x^2 - 17x + 15 = 0$$

Identifique los respectivos coefientes para usar en la fórmula:

$$a = 4, \qquad b = -17, \qquad c = 15$$

Con estos valores entramos en la Fórmula General:

$$\mathbf{x} = \frac{-\mathbf{b} \pm \sqrt{\mathbf{b}^2 - 4\mathbf{ac}}}{\mathbf{2a}}$$

$$\mathbf{x} = \frac{-(-17) \pm \sqrt{-17^2 - 4 * 4 * 15}}{2 * 4}$$

Resolviendo la operaciones indicadas:

$$\mathbf{x} = \frac{(17) \pm \sqrt{49}}{8} = \frac{17 \pm 7}{8}$$

Separando ambas respuestas:

$$x_1 = \frac{17 + 7}{8} = \frac{24}{8} = 3, \quad \textit{Rta.}$$

$$x_2 = \frac{17 - 7}{8} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}, \quad \textit{Rta.}$$

Este método y ejemplos de aplicación lo puede encontrar en el Ejercicio 1.3 de su Texto básico en la página 53, los ejemplos del 31 al 44.

3.7 Ecuaciones con radicales

En general las ecuaciones con radicales requieren eliminar el radical elevando al mismo exponente del índice del radical, esencialmente es poder lograr la simplificación del radical, tambien se puede emplear el principio de substitución como modo para no trabajar con radicales.

En el siguiente ejemplo podrá apreciar esta técnica.

Ejemplo 39

Resolución de la siguiente ecuación con radicales:

$$\sqrt{y - 3} = \sqrt{y} - 3$$

Elevando al cuadrado ambos miembros y conformando un binomio al cuadrado asi:

$$\left(\sqrt{y-3}\right)^2 = \left(\sqrt{y}-3\right)^2$$

Simplifique el radical y plantee el binomio al cuadrado:

$$y-3 = y-6\sqrt{y}+9$$

Transponga la variable a la izquierda, así:

$$y-y+6\sqrt{y} = 9$$

Reduciendo términos semejantes y simplificando:

$$6\sqrt{y} = 9$$

$$2\sqrt{y} = 3$$

Eleve al cuadrado ambos miembros, asi:

$$\left(2\sqrt{y}\right)^2 = 3^2$$

$$4y = 9$$

Separando ambas respuestas:

$$y = \frac{9}{4}, \quad Rta.$$

Esta metodología se puede utilizar con cualquier grado de ecuación..

3.8 Ecuaciones fraccionarias

Este tipo de ecuaciones poseen denominadores que pueden ser factorables y en el proceso eliminarlas para constituir una forma simple cuadrática que permita su resolución por factoreo o por fórmula general. El siguiente ejercicio detalla el proceso de mejor manera

$$\frac{3}{x-4} + \frac{x-3}{x} = 2$$

A ese ejercicio se deberá multiplicar el MCD que es $x(x-4)$, a los numeradores de las fracciones, de la siguiente manera:

$$\frac{3x(x-4)}{(x-4)} + \frac{(x-3)x(x-4)}{x} = 2x(x-4)$$

$$\frac{3x(x-4)}{(x-4)}+\frac{(x-3)x(x-4)}{x}=2x(x-4)$$

Al simplificar las fracciones obtenemos una ecuación libre de fracciones:

$$3x+(x-3)(x-4)=2x^2-8x$$

Eliminando los paréntesis por multiplicar o por la propiedad distributiva tenemos:

$$3x+x^2-4x-3x+12=2x^2-8x$$

Transponiendo y reduciendo términos semejantes da:

$$-x^2+4x=-12$$

Obtengamos el modelo cuadrático, cambiamos el signo e igualamos a cero, así:

$$x^2-4x-12=0$$

Esta forma permite factorar y resolver la ecuación:

$$(x-6)(x+2)=0$$

Igualando a cero cada Factor obteremos:

$$x-6=0, \qquad x+2=0$$

$$\boldsymbol{x_1=6,} \quad \boldsymbol{Rta.}$$

$$\boldsymbol{x_2=-2,} \quad \boldsymbol{Rta.}$$

Recuerde:

Que el objetivo primordial en este tipo de ecuaciones es importante eliminar los denominadores por cualquier método.

Ejemplo 40

Resolución de la siguiente ecuación con fracciones:

$$\frac{1}{(x-2)^2}-\frac{12}{x-2}+35=0$$

Multiplicando a cada numerador por el MCD que sería $(x-2)^2$ y da:

$$\frac{(x-2)^2}{(x-2)^2}-\frac{12(x-2)^2}{x-2}+35(x-2)^2=0$$

Simplifique cada fracción y se eliminan los denominadores asi:

$1 - 12(x-2) + 35(x-2)^2 = 0$

$$1 - 12x + 24 + 35(x^2 - 4x + 4) = 0$$

Aplique propiedad distributiva y simplificando:

$$1 - 12x + 24 + 35x^2 - 140x + 140 = 0$$

Ordene y reduzca términos semejantes asi:

$$35x^2 - 152x + 165 = 0$$

En esta condición aplico la fórmula general:

$$\mathbf{x} = \frac{-\mathbf{b} \pm \sqrt{\mathbf{b}^2 - 4\mathbf{ac}}}{\mathbf{2a}}$$

$$\mathrm{x} = \frac{152 \pm \sqrt{-152^2 - 4 * 35 * 165}}{2 * 35}$$

$$\mathrm{x} = \frac{152 \pm \sqrt{23.104 - 23.100}}{70}$$

$$\mathrm{x} = \frac{152 \pm 2}{70}$$

Separando ambas respuestas y simplificando:

$$\boldsymbol{x_1 = \frac{154}{70} = 2,2,\quad Rta.}$$

$$\boldsymbol{x_1 = \frac{150}{70} = 2,1,\quad Rta}$$

Recuerde:

El MCD, siempre será el de mayor exponente, y eliminar los denominadores.

Mas ejemplos para mejorar y dominar la resolución de ecuaciones fraccionarias las puede encontrar en el Ejercicio 1,3 de su Texto básico en la página 54, los ejemplos del 55 al 65 son especialmente recomendados.

Se ha concluido el estudio de esta unidad, siempre le recomiendo revisar lo recomendado hasta que domine el tema en particular y detalles que usted confirma necesita mejorar y así conocer su nivel de conocimientos.

Autoevaluación 3.6

Lea y responda en el espacio entre paréntesis si es verdadera con “V” o falsa con “F”.

1.-	( )	*Al resolver esta ecuación:* $\left(\sqrt{y}-3\right)^2 = \left(\sqrt{y}-3\right)^2$ se tiene que: $y = \frac{9}{4}$
2.-	( )	*Las raices de la ecuación:* $\frac{4x^2-16}{4} = 1, son\ x_1 = 2\ y\ x_2 = -2.$
3.-	( )	La ecuación cuadrática $x^2 = \frac{1}{2}, sus\ raices\ son: \begin{matrix} x_1=0{,}5 \\ x_2=-0{,}5 \end{matrix}$
4.-	( )	*Lo ecuación:* $y^2 + y - 12, tiene\ la\ solución: \begin{matrix} y_1 = 3 \\ y_2 = -4 \end{matrix}$
5.-	( )	Puede ser $x_1 = 0, una\ de\ las\ raíces\ de\ la\ ecuación: x(x+2) = 0$
6.-	( )	*Las raices:* $\begin{matrix} x_1 = -2 \\ x_2 = -5 \end{matrix}, provienen\ de\ la\ ecuación: x^2 + 7x + 10 = 0$
7.-	( )	Al resolver la ecuación: $6w^2 - 5w = 0, las\ raices\ son: \begin{matrix} w_1=0 \\ w_2=\frac{5}{6} \end{matrix}$
8.-	( )	*La ecuación:* $(a+2)(a-1) = 0, tiene\ por\ solución: \begin{matrix} a_1 = -2 \\ a_2 = 1 \end{matrix}$
9.-	( )	*La ecuación* $x^2 = 3, tiene\ por\ solución: \begin{matrix} x_1 = \sqrt{3} \\ x_2 = -\sqrt{3} \end{matrix},$
10.-	( )	Por la fórmula general la ecuación: $\frac{1}{x^6} + \frac{9}{x^2} + 8 = 0,\ arroja: \begin{matrix} x_1=-1 \\ x_2=-\frac{1}{2} \end{matrix}$

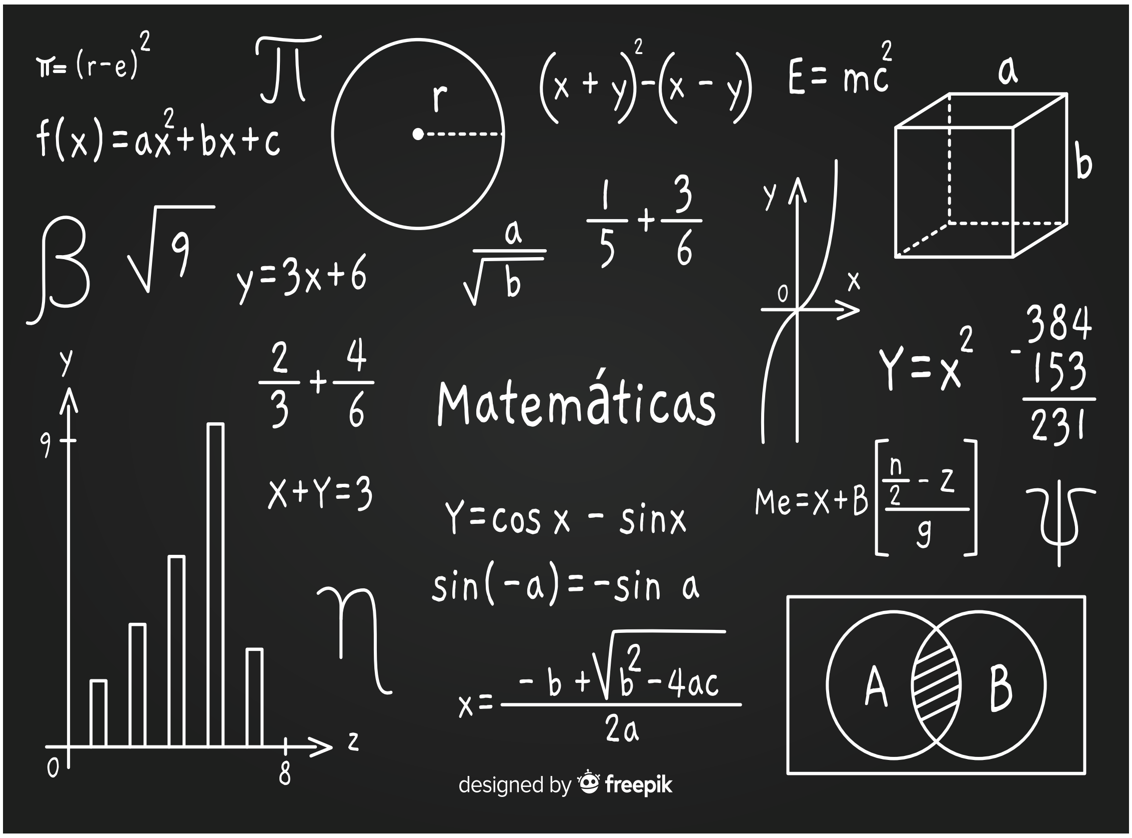
Verifique sus respuestas en el solucionario al final de la presente guía didáctica.

“Si Los números perfectos, como los hombres perfectos, son muy extraños"

Descartes

¡¡Éxitos en la tarea que ha emprendido!!

Ir al solucionario



Resultado de aprendizaje 7

Participa efectiva y frecuentemente en grupos de trabajo, proponiendo soluciones apoyadas en metodologías cuantitativas.

Usted llegará a identificar expresiones denominadas desigualdades lineales, esto es aquellas que presentan un grado de comparación de mayor o menor en la variable y llegar a resolver ejercicios estimados y considerados que conllevan expresiones racionales a simplificar.

Conocerá y dominará la metodología a partir de las propiedades y aplicar operaciones básicas garantizando que domina la resolución de desigualdades y encuentra el rango de la incógnita.

Finalmente, con el conocimiento de la metodología de resolución de desigualdades al expresar las mismas de una manera gráfica y en intervalo.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje

Unidad 4. Desigualdades, y ecuaciones

Semana 7

Unidad 4 “Desigualdades y ecuaciones”

1 Desigualdades y ecuaciones lineales

Suponga que *a* y *b* son dos puntos sobre la recta de los números reales. Entonces, *a* y *b* coinciden, y además se pueden dar las siguientes posiciones que “*a*” e encuentra a la izquierda de “*b*”, o “*a*” se encuentra a la derecha de “*b*”. (vease la fig. 4.1).

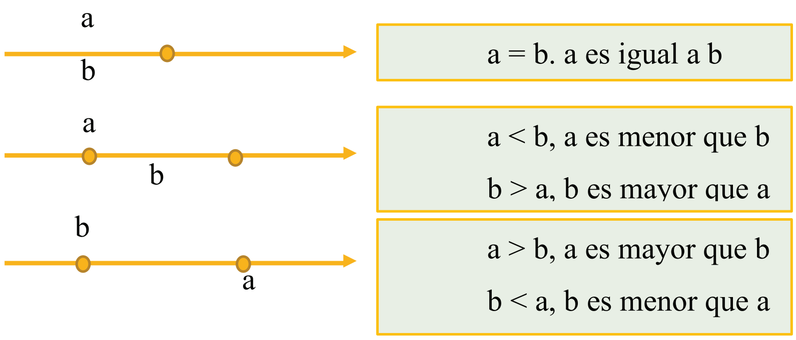


Figura 4,1. Ubicación relativa de dos puntos en la recta numérica
Elaborado por:Espinosa. K, (2022), Guía Didáctica Matemática, Quito: ISTHCPP

Si *a* y *b* coinciden entonces *a* = *b*. Si *a* se encuentra a la izquierda de *b*, decimos que *a* es menor que *b* y escribimos a < b, en donde el *símbolo de desigualdad* “ < ” se lee “es menor que”. Por otra parte, si *a* se encuentra a la derecha de *b*, decimos que *a* es mayor que *b* y escribimos a > b. Los enunciados a > b y b < a son equivalentes.

Otro símbolo de desigualdad, "≤", se lee "es menor o igual a" y se define como: a ≤ b si y sólo si a < b o a = b. De manera semejante, el símbolo "≥" está definido como: a ≥ b si y sólo si a > b o a = b. En este caso decimos que *a* es mayor o igual a *b*.

Usaremos las palabras *números reales* y *puntos* de manera indistinta, ya que existe una correspondencia uno a uno entre los números reales y los puntos que están sobre una recta. Así, podemos hablar de los puntos -5, -2, 0 ,7 y 9, y escribir 7 < 9, -2 > -5, 7 ≤ 7 y 7 ≥ 0 (véase la fig. 4.2). Claramente, si a > 0, entonces *a* es positivo; si a < 0, entonces *a* es negativo.

-5 -2 0 7 9

Figura 4,2. Puntos en la recta numérica

Elaborado por:Espinosa. K, (2022), Guía Didáctica Matemática, Quito: ISTHCPP

Una *desigualdad* es un enunciado que establece que un número es menor que otro.

Reglas para las desigualdades

1. Si un mismo número se suma o resta en ambos lados de una desigualdad, la desigualdad resultante tendrá el mismo sentido que la original. En forma simbólica, si a < b, entonces a + c < b + c y a - c < b - c.

Por ejemplo, 7 < 10, de modo que 7 + 3 < 10 + 3.

2. Si ambos lados de una desigualdad se multiplican o dividen por el mismo número positivo, la desigualdad resultante tendrá el mismo sentido que la original. En forma simbólica,

si a < b y c > 0, entonces ac < bc y $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$

Por ejemplo, 3 < 7 y 2 > 0, de modo que 3(2) < 7(2) y $\frac{3}{2} < \frac{7}{2}$

3. Si ambos lados de una desigualdad se multiplican o dividen por el mismo número *negativo*, entonces la desigualdad resultante tendrá el sentido *contrario* de la original. En forma simbólica,

si a < b y c > 0, entonces a(-c) > b(-c) y $\frac{a}{-c} > \frac{b}{-c}$

Por ejemplo, 4 < 7 pero 4(-2) > 7(-2) y $\frac{4}{-2} < \frac{7}{-2}$

4. Cualquier lado de una desigualdad puede reemplazarse por una expresión equivalente a ella. En forma simbólica,

si $a < b$ y $a = c$, entonces $c < b$.

Por ejemplo, si $x < 2$ y $x = y + 4$, entonces $y + 4 < 2$.

5. Si los lados de una desigualdad son ambos positivos o negativos, entonces sus recíprocos [1] respectivos estarán relacionados por un símbolo de desigualdad con sentido *contrario* a la desigualdad original.

Por ejemplo, $2 < 4$, pero $\frac{1}{2} > \frac{1}{4}$

6. Si ambos lados de una desigualdad son positivos y elevamos cada lado a la misma potencia positiva, entonces la desigualdad resultante tendrá el mismo sentido que la original.

Por tanto, si $0 < a < b$ y $n > 0$, entonces $a^n < b^n$ y $\sqrt{a} < \sqrt{b}$,

en donde suponemos que n es un entero positivo <u>en</u> la <u>última</u> desigualdad.

Por ejemplo, $4 < 9$ de modo que $4^2 < 9^2$ y $\sqrt{4} < \sqrt{9}$

El resultado de aplicar las reglas 1 a 4 a una desigualdad se conoce como *desigualdad equivalente.* Ésta es una desigualdad cuya solución es exactamente la misma que la de la original. Aplicaremos estas reglas a una *desigualdad lineal.*

Una desigualdad lineal en la variable “x” es aquella que puede escribirse de la forma: $ax + b < 0$, Donde a y b son constantes y $a \neq 0$.

El ejercicio siguiente, le permite comprender el proceso de resolución y la aplicación a otros ejercicios con empleo de todas las propiedades. Fíjese en lo siguiente:

$$2(x-3) < 4$$

Aplique la propiedad distributiva:

$$2x - 6 < 4$$

Transponiendo los términos:

$$2x < 4 + 6$$

$$2x < 10$$

$$x < \frac{10}{2},$$

$\boldsymbol{x < 5,}$ $\boldsymbol{Rta.}$ Solución numérica

La respuesta quiere decir que son "Todos los números menores a "5", pero no incluye al "5"", A esta respuesta se la denomina numérica, pero el ejemplo requiere de la ayuda de una respuesta gráfica y de intervalo.

Solución gráfica

5

Fíjese que el círculo esta vacio, que indica no incluye el punto "5".

Solución en intervalo

$(-\infty\ ;\ 5)$

Al no incluir el punto cinco la respuesta de intervalo adopta el paréntesis de igual manera para el infinito.

Recuerde:
Que las desigualdades arrojan tres respuestas, una numérica, otra gráfica y finalmente una en intervalo.

Utilice la figura circular rellena o pintada y corchetes cuando se utilice los signos $\leq, \geq$.

Utilice la figura circular vacía o sin pintar y paréntesis cuando se utilice los signos $<, >$.

En este segundo ejemplo encontrará un caso que involucra la igualdad.

$$2(x-1) \leq 4(x-2)$$

Aplique la propiedad distributiva:

$$2x - 2 \leq 4x - 8$$

Transponiendo los términos:

$$-2x \leq -6$$

Al multiplicar a ambos miembros por "-1", para hacerlos positivos, se cambia la direcci de la desigualdad, así:

$$2x \geq 6$$

$$x \geq \frac{6}{2},$$

$\boldsymbol{x \geq 3,}$ $\boldsymbol{Rta.}$ Solución numérica

Son todos los números igual a 3 y mayores que 3, (4, 5, 6, ...)

Solución gráfica

Fíjese que el círculo esta lleno, que indica incluye el punto “3”.

Solución en intervalo

$[3; \infty)$

Al incluir el punto tres la respuesta de intervalo adopta el corchete, mas no el infinito que conserva el paréntesis, pues no se puede incluir al infinito.

Recuerde:
Que las desigualdades arrojan tres respuestas, una numérica, otra gráfica y finalmente una en

Utilice la figura circular rellena o pintada y corchetes cuando se utilice los signos $\leq, \geq$.

Ejemplo 41

Resolución de la siguiente desigualdad con fracciones:

$$\frac{9y+1}{4} \leq 2y - 1$$

Multiplicando a cada numerador por el MCD que sería “4” da:

$$\frac{4(9y+1)}{4} \leq 4 * 2y - 4 * 1$$

Simplifique cada fracción y se eliminan los denominadores asi:

$$9y + 1 \leq 8y - 4$$

Transponiendo y simplificando:

$y \leq -5, \quad Rta.$ **Solución numérica**

Son todos los números igual a -5 y menores que -5, (-5, -6, -7, ……).

Solución gráfica

Fíjese que el círculo esta lleno, que indica que incluye el punto “-5”.

Solución en intervalo

$(-\infty\, ; \, -5]$

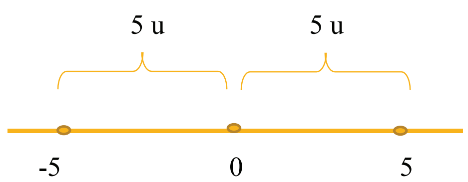
Al incluir el punto “menos cinco” la respuesta de intervalo adopta el corchete y para el infinito se conserva el paréntesis

En el Ejercicio 2.2 de las páginas 74 y 75 de su Texto básico, tiene varios ejemplos a dominar del tema Póngale atención al ejemplo 35 sobre utilidades que es interesante..

4.1 Ecuaciones con valor absoluto

En la recta de los números reales, a la distancia desde el cero hasta un número "x" se le llama el valor absoluto de "x", el cual se denota por $|x|$. Nótese que la distancia no tiene un signo ni un sentido, nos da igual medir los metros por ejemplo de izquierda a derecha o de detecha a izquierda.

Por ejemplo, $|5| = 5, y\ de\ |-5| = 5$. La distancia desde el cero hasta el cinco es 5 unidades e igual desde el cero hasta el -5 es también 5 unidades. (véase la figura 4,1). Como puede obserbar "x" nunca puede ser negativo. y el balor absoluto de cero es cero. $|0| = 0$.



$|5| = |-5| = 5$

Figura 4.1

Por definición El valor absoluto de un número real "x", escrito como: $|x|$, es:

$$|\mathbf{x}| = \begin{cases} \mathbf{x, si\ x \geq 0}. \\ \mathbf{-x, si\ x < 0}, \end{cases}$$

Observe y analice los siguientes ejemplos:

$$|3| = 3$$
$$-|2| = -2$$

$$|-8| = -(-8)$$
$$-2|-2 = -2|$$

Ejemplo 42

Resolución de la siguiente ecuación con valor absoluto:

$$|x - 3| = 2$$

x-3, está a 2 unidades de distancia, entonces las dos condiciones son:

$$x - 3 = 2, \quad o \quad x - 3 = -2$$

Resolviendo las dos ecuaciones se obtiene:

$$\boldsymbol{x = 5, \qquad x = 1 \qquad Rtas.}$$

Recuerde:
Que el valor absoluto nunca es

Se le sugiere analizar del Ejercicio de repaso, los ejemplos 11 y 12.

4.2 Desigualdades con valor absoluto

La tabla siguiente le ayudará a plantear desigualdades con valor absoluto.

Tabla 4.2

Desigualdad ($d > 0$)	Solución
$\lvert x\rvert < d$	$-d < x < d$
$\lvert x\rvert \leq d$	$-d \leq x \leq d$
$\lvert x\rvert > d$	$x < -d, o\ x > d$
$\lvert x\rvert \geq d$	$x \leq -d, o\ x \geq d$

Ejemplo 43

Resolución de la siguiente desigualdad con valor absoluto:

$$|x - 2| < 4$$

Adapte a la solución de la tabla 4.2 así:

$$-4 < x - 2 < 4$$

$$-4 \color{red}{+ 2} < x < 4 \color{red}{+ 2}$$

Sumando el 2 en ambos miembros:

$\color{red}{\mathbf{-2 < x < 6,}}$ $\color{red}{\boldsymbol{Rta}}$**. Solución numérica**

Solución gráfica

Fíjese que el círculo no esta lleno, que indica que no incluyen a los puntos.

Solución en intervalo

$$(-2;\ 6)$$

La respuesta de intervalo en paréntesis porque los puntos no están incluidos

Propiedades del valor absoluto	
1	$\lvert ab\rvert = \lvert a\rvert.\lvert b\rvert$
2	$\left\lvert\frac{a}{b}\right\rvert = \frac{\lvert a\rvert}{\lvert b\rvert}$
3	$\lvert a-b\rvert = \lvert b-a\rvert$
4	$-\lvert a\rvert \leq a \leq \lvert a\rvert$

Ejemplo 44

Aplicación de las propiedades en los siguienes ejemplos con valor absoluto:

$$a). - |(-7 * 3| = |-7| * |3|$$

b). - $|4 - 2| = |2 - 4| = 2$

$$\boldsymbol{c. - |7 - x| = |x - 7|}$$

$$\boldsymbol{d. - \left|\frac{-7}{3}\right| = \frac{|-7|}{|3|} = \frac{7}{3}}$$

$$\boldsymbol{e. - \left|\frac{-7}{-3}\right| = \frac{|-7|}{|-3|} = \frac{7}{3}}$$

$$\boldsymbol{f. - \left|\frac{x-3}{-5}\right| = \frac{|x-3|}{|-5|} = \frac{|x-3|}{5}}$$

$$\boldsymbol{g. - -|2| \leq 2 \leq |2|}$$

Ejemplo 45

Resolución del ejercicio siguiente aplicando propiedade del valor absoluto:

$$\left|\frac{x}{4}\right| > 2$$

Aplique la propiedad d) del valor absoluto, así:

$$\frac{|x|}{|4|} > 2$$

$$\frac{x}{4} > 2$$

$x > 8,$ *Rta.* **Solución numérica**

Son todos los números mayores que no incluyen al “8” hasta el infinito

Solución gráfica

8

Fíjese que el círculo no esta lleno, que indica que no incluyen al punto.

Solución en intervalo

$(8;\ +\infty)$

El intervalo en paréntesis porque el punto no está incluido ni el infinito.

4.3 Aplicaciones de ecuaciones y desigualdades

Cuando las palabras o cierta cituación es expresada en símbolos matemáticos y estos a su vez se expresan mediante una ecuación o una desigualdad, se está frente a lo que se denomina ***modelado matemático***.

Es importante leer el problema o situación hasta comprender con claridad la información y qué es lo que se solicita encontrar. Después debe seleccionar una letra para representar la variable o incógnita o la cantidad desconocida que se quiere determinar.

Utilice las relaciones e información que el problema proporciona, y forme una ecuación o desigualdad. Por último, resuelva la ecuación y vea si su solución responde a lo que se pregunta. Algunas veces la solución de la *ecuación* es matemática pero no lógica.

Algunas relaciones básicas para resolver problemas de administración son las siguientes:

$$\boldsymbol{costo\ total\ =\ costo\ variable\ +\ costo\ fijo}$$

$$\boldsymbol{ingresototal = (precioporunidad)(n\text{ú}merodeunidadesvendidas)}$$

$$\boldsymbol{utilidad = ingreso\ -\ costo\ total}$$

Los símbolos de desigualdad $>, <, \geq, \leq$, y se utilizan para representar una desigualdad, la cual es un enunciado en el que un número puede ser mayor o menor que otro, o mayor igual y menor igual a otro, por ejemplo. Tres operaciones básicas que cuando se aplican a una desigualdad, garantizan una desigualdad equivalente son:

1. Sumar (o restar) el mismo número a (o de) ambos lados.
2. Multiplicar (o dividir) ambos lados por el mismo número positivo.
3. Multiplicar (o dividir) ambos lados por el mismo número negativo e invertir el sentido de la desigualdad.
4. Multiplicar (o dividir) ambos lados por el mismo número negativo e invertir el sentido de la desigualdad.

Estas operaciones son útiles para resolver una desigualdad lineal (ésta es una que pueda escribirse en la forma $\boldsymbol{ax + b < 0}$, o $\boldsymbol{ax + b \leq 0}$, donde $a \neq 0$

Una definición algebraica de valor absoluto es:

$\boldsymbol{|x| = x, si\ x \geq 0}$, y $\boldsymbol{|x| = -x, si\ x < 0}$

Ejemplo 46

Resolución de una desigualdad aplicando propiedade del valor absoluto:

$$|x + 5| \geq 8$$

X+5, debe estar a 8 unidades entonces plantee dos condiciones, así:

$x + 5 \leq -8, \qquad x + 5 \geq 8$

Entonces se obtiene dos intervalos así:

$$x \leq -13, \qquad x \geq 3$$

$$(-\infty; -13], \qquad [3; +\infty)$$

Entonces una, las respuestas de la siguiente manera>

$$(-\infty; -13] \cup [3; +\infty)$$

Donde la “U” es el símbolo que une las respuestas y que significa unión.

$(-\infty; \mathbf{-13}] \cup [\mathbf{3}; +\infty)$ Solución numérica

Son todos los números menores a – 13 incluido, hasta el infinito y mayores a 3 incluido, hasta el infinito

Solución gráfica

Fíjese que el círculo esta lleno, que indica que incluyen al punto.

Solución en intervalo

$(-\infty; \mathbf{-13}] \cup [\mathbf{3}; +\infty)$

El intervalo incluye por lo tanto corchete y paréntesis por el infinito.

Se le sugiere analizar del Ejercicio 2.4 de su Texto básico, los ejemplos del 15 al 36 son muy didácticos.

Se ha concluido el estudio de esta unidad, siempre le recomiendo revisar lo recomendado hasta que domine el tema en particular y detalles que usted confirma necesita mejorar y así conocer su nivel de conocimientos.

A continuación, le invito a desarrollar la siguiente autoevaluación, cuyo objetivo es conocer cuánto usted ha comprendido del tema, además podrá revisar en la sección del solucionario, la retroalimentación de cada pregunta.

Autoevaluación 4.7

Lea y responda en el espacio entre paréntesis si es verdadera con "V" o falsa con "F".

1.-	( )	La desigualdad: $3 - 2x \leq 6, tiene\ por\ respuesta: x \geq -\frac{3}{2}$
2.-	( )	La desigualdad: $3 - 2x \leq 6, se\ cumple\ en\ el\ intervalo: [-\frac{3}{2}; +\infty)$
3.-	( )	Esta desigualdad: $2(x - 4) - 3 > 2x - 1$ no se va a cumplir nunca.
4.-	( )	$Lo\ desigualdad\ -\frac{2}{3}x > 6, se\ cumple\ en\ el\ intervalo\ (-\infty; 9)$
5.-	( )	Aplicando las propiedades del valor absoluto a la expresión $\lvert x - 4\rvert = -3$, no tendría respuesta.
6.-	( )	$Es\ equivalente: \frac{\lvert x\rvert}{\lvert 2\rvert}\ a: \left\lvert\frac{x}{2}\right\rvert$
7.-	( )	Si modelamos matemáticamente el enunciado "x está a menos 3 unidades del 5", se puede escribir: $\lvert x - 5\rvert < 3$
8.-	( )	Es correcto escribir $x < 3\ \ y. x > -3,\ \ por:\ \lvert x\rvert < 3$
9.-	( )	$El\ siguiente\ enunciado: \lvert x - 1\rvert, es\ igual\ a: \lvert 1 - x\rvert$
10.-	( )	La expresión: $\lvert x\rvert < 4, no\ tiene\ solución.$

Verifique sus respuestas en el solucionario al final de la presente guía didáctica.

"Para aquellos que no conocen las matemáticas, es difícil sentir la belleza de la naturaleza.

Si quieres apreciarla, es necesario aprender el lenguaje en el que habla".

Richard Feynman

¡¡Éxitos en la tarea que ha emprendido!!

Ir al solucionario

Resultado de aprendizaje 8

Puede resolver sistemas de ecuaciones aplicadas a la oferta y demanda administrativa de bienes y servicios.

Usted llegará a identificar expresiones denominadas ecuaciones enfocadas a la resolución simultánea de varias de ellas o denominadas sistemas que para este caso serán lineales, esto es aquellas que presentan un grado de comparación de mayor o menor en la variable y llegar a resolver ejercicios estimados y considerados que conllevan expresiones racionales a simplificar.

Conocerá y dominará la metodología a partir de las propiedades como la suma y resta, la sustitución y la igualación de ecuaciones para encontrar el valor de las variables en sistemas de hasta tres incógnitas, usted podrá percatarse que domina y aplica las operaciones básicas y encuentra los valores simultáneamente de las incógnitas.

Finalmente, con el conocimiento de la metodología de resolución de cualquier sistema de ecuaciones podrá plasmarlas de manera gráfica y entenderá la aplicación de las mismas a situaciones reales de la profesión.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje

Semana 8

4.4 Introducción a los sistemas de ecuaciones lineales

Un sistema de ecuaciones se considera como tal, cuando presenta mas de dos ecuaciones y dos incógnitas, es decir el mismo número de ecuaciones y el mismo número de incógnitas, establecidos para ser resueltos simultáneamente. Fíjese en estos ejemplos:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ -x + 3y = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y + z = -2 \\ 2x - 5y + z = 1 \\ -y + 2z = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} u + v = 3 \\ 2u - 3v = 10 \end{cases}$$

Se puede comprobar que el número de ecuaciones corresponde con el número de incógnitas, además todas las variables están elevadas a la primera potencia.

A continuación una aplicación muy común de la vida real en la que se exiben dos condiciones en modo matemático, entonces las condiciones son:

El administrador de una fábrica establece dos maneras de producción para dos modelos de un producto nuevo. El modelo A requiere de 4 piezas del tipo I y 9 piezas del tipo II. El modelo B requiere de 5 piezas del tipo I y 14 piezas del tipo II.

De sus proveedores, la fábrica obtiene 335 piezas del tipo I y 850 piezas del tipo II cada día. ¿Cuántos productos de cada modelo debe producir cada día, de modo que todas las piezas del tipo I y piezas del tipo II sean utilizadas?

Construir una tabla también ayuda a visualizar la información:

	Modelo A	Modelo B	Disponible

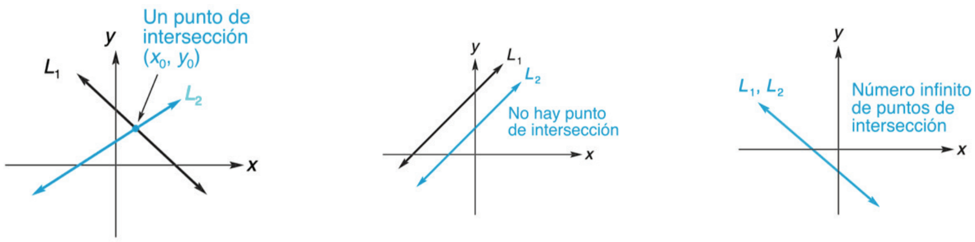
Piezas tipo 1	4	5	335
Piezas tipo 2	9	14	850

Si la información de la tabla la modelamos matemáticamente se puede expresar asi:

$$\begin{cases} 4x + 5y = 335 \\ 9x + 14y = 850 \end{cases}$$

A este conjunto de ecuaciones se les denomina Sistemas de ecuaciones lineales, al encontrar los valores de "x" y de "y", que satisfacen simultáneamente a las dos ecuaciones. Estas soluciones pueden ser reales o imaginarias, para nuestro caso y carrera solamente tomaremos en cuenta las soluciones reales y lógicas.

Como las ecuaciones son lineales, sus gráficas son líneas rectas; llamémoslas L_1 y L_2. Ahora, las coordenadas de cualquier punto sobre una línea satisfacen la ecuación de esa línea; esto es, hacen a la ecuación verdadera. Por tanto, las coordenadas de cualquier punto de intersección de L_1 y L_2 satisfacen ambas ecuaciones. Esto significa que un punto de intersección da una solución del sistema. Pero pueden darse tres condiciones, analice los gráficos que siguen:



Cuando se produce la intersección es la coordenada solución del sistema.

Recuerde:
Que el valor de la coordenada "x" y de "y", son la solución del sistema.

Se puede solucionar un sistema lineal de ecuaciones por cuatro maneras, a continuación, le explico.

4.5 Método de igualación

Dado el sistema, ordene las ecuaciones, identifiquelas, para nuestro caso L1 y L2..

$$\begin{matrix} \color{red}{L1} \\ \color{red}{L2} \end{matrix}\begin{cases} \mathbf{4x + 5y = 335} \\ \mathbf{9x + 14y = 850} \end{cases}$$

Elija una variable que puede ser la “x” y despejamos ésta de cada ecuación:

$$de\ L1, 4x + 5y = 335 \qquad de\ L2, 9x + 14y = 850$$

$$4x = 335 - 5y \qquad 9x = 850 - 14y$$

$$x = \frac{335 - 5y}{4} \qquad x = \frac{850 - 14y}{9}$$

Esta situación nos lleva a igualar los segundos miembros de cada ecuación, asi:

$$\frac{335 - 5y}{4} = \frac{850 - 14y}{9}$$

Elimar los denominadores multiplicando por 36 que es el MCD. da:

$$9(335 - 5y) = 4(850 - 14y)$$

Puede apreciar que se convirtió en una ecuación de una incógnita, al resolverla así:

$$3015 - 45y = 3400 - 56y$$

Transponiendo y simplificando da:

$$11y = 385$$

$$\mathbf{y = 35, \quad Rta.}$$

Se ha encontrado el valor de “y” una de las variables, este valor lo reemplazamos en cualquiera de las ecuaciones para encontrar “x”, por ejemplo en **L1**, en la expresión que ya está despejada de la siguiente manera:

$$x = \frac{335 - 5y}{4}$$

$$x = \frac{335 - 5(11)}{4} = \frac{335 - 55}{4} = \frac{280}{4}$$

$$\mathbf{x = 40, \quad Rta.}$$

La solución del sistema se cumple cuando x=40, y y=35.

Recuerde:
Que el valor de la coordenada “x” y de “y”, son la solución del sistema.

4.6 Método de substitución

Dado el sistema, ordene las ecuaciones, identifiquelas, para nuestro caso L1 y L2..

$$\begin{matrix} \boldsymbol{L1} \\ \boldsymbol{L2} \end{matrix} \begin{cases} \mathbf{4x + 5y = 335} \\ \mathbf{9x + 14y = 850} \end{cases}$$

Elija una variable que puede ser la "x" y despeje de cualquier ecuación:

$$de\ L1, 4x + 5y = 335$$

$$4x = 335 - 5y$$

$$x = \frac{335 - 5y}{4}$$

Esta expresión la sustituimos en **L2**

$$en\ L2, 9x + 14y = 850$$

$$9\left(\frac{335 - 5y}{4}\right) + 14y = 850$$

Eliminar denominadores, por "4".

$$3015 - 45y + 56y = 3400$$

$$11y = 385$$

$$\boldsymbol{y = 35, \quad Rta.}$$

Otra vez, el valor encontrado de "y", se reemplaza en la expresión despejada **L1**, que nos permita encontrar "x", de la siguiente manera:

$$x = \frac{335 - 5(35)}{4} = \frac{335 - 175}{4} = \frac{160}{4}$$

$$\boldsymbol{x = 40, \quad Rta.}$$

La solución del sistema se cumple cuando x=40, y y=35.

4.7 Método de suma y resta

Dado el sistema, ordene las ecuaciones, identifiquelas, para nuestro caso L1 y L2..

$$\begin{matrix} \boldsymbol{L1} \\ \boldsymbol{L2} \end{matrix} \begin{cases} \mathbf{4x + 5y = 335} \\ \mathbf{9x + 14y = 850} \end{cases}$$

Elija un nùmero que al multiplicarse en cualquiera de las ecuaciones se conviertan en ecuaciones equivalente y nos permita sumar o restar y de esa manera eliminar una de las variables. Por ejemplo si a L1 le multiplica por "9" y a L2 por "4" y restamos las ecuaciones obtendremos lo siguiente:

$$\begin{matrix} *\ \mathbf{9} \\ *\ \mathbf{-4} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \boldsymbol{L1} \\ \boldsymbol{L2} \end{matrix} \begin{cases} \mathbf{4x + 5y = 335} \\ \mathbf{9x + 14y = 850} \end{cases}$$

Obtiene un sistema equivalente como el siguiente:

$$\begin{matrix} \color{red}{L1} \\ \color{red}{L2} \end{matrix}\begin{cases} \mathbf{36x + 45y = 3015} \\ \mathbf{-36x - 56y = -3400} \end{cases}$$

Si sumanos las dos ecuaciones se elimina la "x" y podemos obtener "y", asi:

$$-11y = -385$$

Despejando la "y", da:

$$y = \frac{-385}{-11} = 35$$

$$\color{red}{\boldsymbol{y = 35,\quad Rta.}}$$

Otra vez, el valor encontrado de "y", se reemplaza en **L1**, que nos permita encontrar "x", de la siguiente manera:

$$x = \frac{335 - 5(35)}{4} = \frac{335 - 175}{4} = \frac{160}{4}$$

$$\color{red}{\boldsymbol{x = 40,\quad Rta.}}$$

La solución del sistema se cumple cuando x=40, y y=35.

4.8 Método gráfico

Este método, permite encontrar graficamente el punto de intersección de dos líneas rectas que representan a las dos ecuaciones a resolver, el procedimiento es simple y es:

Dado el sistema, ordene las ecuaciones, identifiquelas, para nuestro caso L1 y L2..

$$\begin{matrix} \color{red}{L1} \\ \color{red}{L2} \end{matrix}\begin{cases} \mathbf{4x + 5y = 335} \\ \mathbf{9x + 14y = 850} \end{cases}$$

Conviene despejar la "y" de cada ecuación de la siguiente manera:

$$de\ \color{red}{L1,}\ 4x + 5y = 335$$

$$5y = 335 - 4x$$

$$y = \frac{335 - 4x}{5}$$

$$de\ \color{red}{L2,}\ 9x + 14y = 850$$

$$14y = 850 - 9x$$

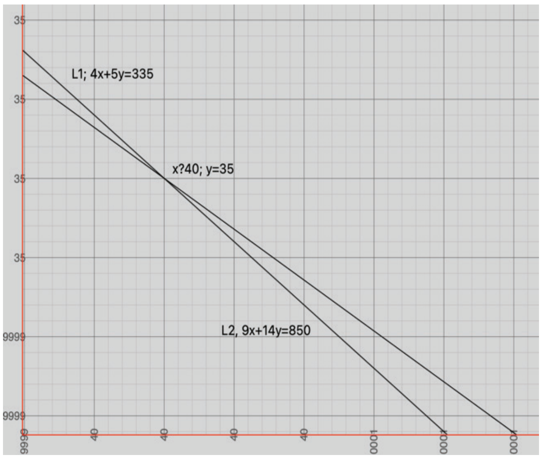
$$y = \frac{850 - 9x}{14}$$

Podemos asignar valores a "x" que nos arrojen valores enteros y prácticos para representar en un plano cartesiano, además de que al ser rectas solamente necesitaremos dos punto para poder dibujarlas a partir de pares ordenados representados en las tablas siguientes. así:

x	y
0	67
10	59

x	y
-2	62
26	44

Se pueden representar estos cuatro puntos y obtener el punto de intersección asi:



Recuerde:
Que el valor de la coordenada "x" y de "y", son la solución del sistema.

Se puede solucionar un sistema gráficamente sin tener conocimientos de procesos matemática si utiliza una aplicación informática.

En la gráfica se puede obserbar que la intersección se produce con la solución del sistema es decir en las coordenadas x=40, y. y=35.

La solución del sistema se cumple cuando x=40, y y=35.

Ejemplo 47

Resolución de un sistema de ecuaciones por todos los métodos:

Dado el sistema, de ecuaciones, L1 y L2..

$$\begin{matrix} L1 \\ L2 \end{matrix} \begin{cases} \mathbf{3x - 4y = 13} \\ \mathbf{3y + 2x = 3} \end{cases}$$

Por igualación:

$$de\ L1, 3x - 4y = 13$$

$$3x = 13 + 4y$$

$$x = \frac{13 + 4y}{3}$$

$$de\ L2, 2x + 3y = 3$$

$$2x = 3 - 3y$$

$$x = \frac{3 - 3y}{2}$$

$$\frac{13+4y}{3}=\frac{3-3y}{2}$$

$$2(13+4y)=3(3-3y)$$

$$26+8y=9-9y$$

$$17y=-17$$

$$y=\frac{-17}{17}=-1$$

$$\boldsymbol{y=-1,\quad Rta.}$$

Se ha encontrado el valor de “y” una de las variables, este valor lo reemplazamos en cualquiera de las ecuaciones para encontrar “x”, por ejemplo en **L1**, en la expresión que ya está despejada de la siguiente manera:

$$x=\frac{13+4y}{3}$$

$$x=\frac{13+4(-1)}{3}=\frac{13-4}{3}=\frac{9}{3}$$

$$\boldsymbol{x=6,\quad Rta.}$$

La solución del sistema se cumple cuando x=6, y y= -1.

Por sustitución

Dado el sistema, de ecuaciones, L1 y L2..

$$\begin{matrix}\boldsymbol{L1}\\ \boldsymbol{L2}\end{matrix}\begin{cases}\boldsymbol{3x-4y=13}\\ \boldsymbol{3y+2x=3}\end{cases}$$

Elija una variable que puede ser la “x” y despeje de cualquier ecuación:

$$de\ L1,\ 3x-4y=13$$

$$3x=13+4y$$

$$x=\frac{13+4y}{3}$$

Esta expresión la sustituimos en **L2**

$$en\ L2,\ 2x+3y=3$$

$$2\left(\frac{13+4y}{3}\right)+3y=3$$

Eliminar denominadores, por “3”.

$$26+8y+9y=9$$

$$17y=-17$$

$$\boldsymbol{y=-1,\quad Rta.}$$

Otra vez, el valor encontrado de “y”, se reemplaza en la expresión despejada **L1**, que nos permita encontrar “x”, de la siguiente manera:

$$x = \frac{13 + 4y}{3} = \frac{13 + 4(-1)}{3} = \frac{9}{3} = 6$$

$$\boldsymbol{x = 6, \quad Rta.}$$

La solución del sistema se cumple cuando x=6, y y= -1.

Por suma y resta

Dado el sistema, ordene las ecuaciones, L1 y L2..

$$\begin{matrix} \boldsymbol{L1} \\ \boldsymbol{L2} \end{matrix} \begin{cases} \boldsymbol{3x - 4y = 13} \\ \boldsymbol{2x + 3y = 3} \end{cases}$$

Si desea eliminar la variable “x”, deberemos multiplicar por “2” y por “-3”, entonces el sistema se traduce en un sistema equivalente de la siguiente manera:

$$\begin{matrix} \boldsymbol{*\,2} & \boldsymbol{L1} \\ \boldsymbol{*\,-3} & \boldsymbol{L2} \end{matrix} \begin{cases} \boldsymbol{6x - 8y = 26} \\ \boldsymbol{-6x - 9y = -9} \end{cases}$$

Si sumamos las dos ecuaciones, obtenemos lo siguiente:

$$-17y = 17$$

$$y = \frac{17}{-17} = -1$$

$$\boldsymbol{y = -1, \quad Rta.}$$

Otra vez, el valor encontrado de “y”, se reemplaza en la expresión despejada **L1**, que nos permita encontrar “x”, de la siguiente manera:

$$x = \frac{13 + 4y}{3} = \frac{13 + 4(-1)}{3} = \frac{9}{3} = 6$$

$$\boldsymbol{x = 6, \quad Rta.}$$

La solución del sistema se cumple cuando x=6, y y= -1.

Por gráfico

Dado el sistema, ordene las ecuaciones, identifiquelas, para nuestro caso L1 y L2..

$$\begin{matrix} \boldsymbol{L1} \\ \boldsymbol{L2} \end{matrix} \begin{cases} \boldsymbol{3x - 4y = 13} \\ \boldsymbol{2x + 3y = 3} \end{cases}$$

Conviene despejar la “y” de cada ecuación de la siguiente manera:

$de\ L1, 3x - 4y = 13$

$-4y = 13 - 3x$

$$y = \frac{13 - 3x}{-4}$$

$de\ L2, 2x + 3y = 3$

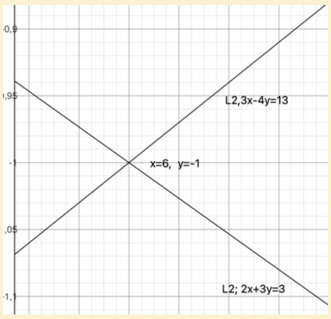
$3y = 3 - 2x$

$$y = \frac{3 - 2x}{3}$$

Podemos asignar dos valores a “x” que son suficientes para poder dibujarlas a partir de pares ordenados representados en las tablas siguientes. así:

x	y
7	2
9	3,5

x	y
0	1
1,5	0



En la gráfica se puede obserbar que la intersección se produce con la solución del sistema es decir en las coordenadas x=6, y. y= -1.

La solución del sistema se cumple cuando x=6, y y= -1.

Se puede resolver más ejemplos del Ejercicio 4.4, de su Texto básico, los ejemplos del 2 al 20, que le permitirá mejorar y dominar el tema.

Se ha concluido el estudio de esta primera unidad, siempre le recomiendo revisar lo recomendado hasta que domine el tema en particular y detalles que usted confirma necesita mejorar y así conocer su nivel de conocimientos.

A continuación, le invito a desarrollar la siguiente autoevaluación, cuyo objetivo es conocer cuánto usted ha comprendido del tema, además podrá revisar en la sección del solucionario, la retroalimentación de cada pregunta.

Estoy seguro de que le irá ¡muy bien!

Autoevaluación 4.8

Lea y responda en el espacio entre paréntesis si es verdadera con “V” o falsa con “F”.

1.-	( )	El sistema $\begin{cases}2x+3y=7\\ x-2y=0\end{cases}$, *tiene por ecuación matricial*: $\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\ 0\end{bmatrix}$
2.-	( )	El sistema $\begin{cases}x+2y=8\\ 2x+4y=-4\end{cases}$.tiene por ecuación matricial: $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8\\ -4\end{bmatrix}$
3.-	( )	El sistema $\begin{cases}x+2y=8\\ 2x+4y=-4\end{cases}$. *tiene por matriz reducida*: $\begin{bmatrix}1 & 2 & 8\\ 2 & 4 & -4\end{bmatrix}$
4.-	( )	Dadas las matrices: $\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & -2\\ 1 & 2\\ 2 & 3\end{bmatrix}$, *no son multiplicables*.
5.-	( )	El producto siguiente: $2\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\end{bmatrix}$, es: $[0]$
6.-	( )	La transpuesta de: $\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & 4 & 3\end{bmatrix}$, es: $\begin{bmatrix}1 & \\ 1 & \\ & \end{bmatrix}$
7.-	( )	De un sistema de ecuaciones, $\begin{cases}y=r\\ x=2-5r\end{cases}$; quiere decir que: $\begin{matrix}x=2-5y\\ y=r\end{matrix}$
8.-	( )	*Este sistema*: $\begin{cases}w+t=500\\ 0.3w+0{,}18t=125\end{cases}$; *tiene por solución*: $\begin{matrix}x=291\\ y=208\end{matrix}$

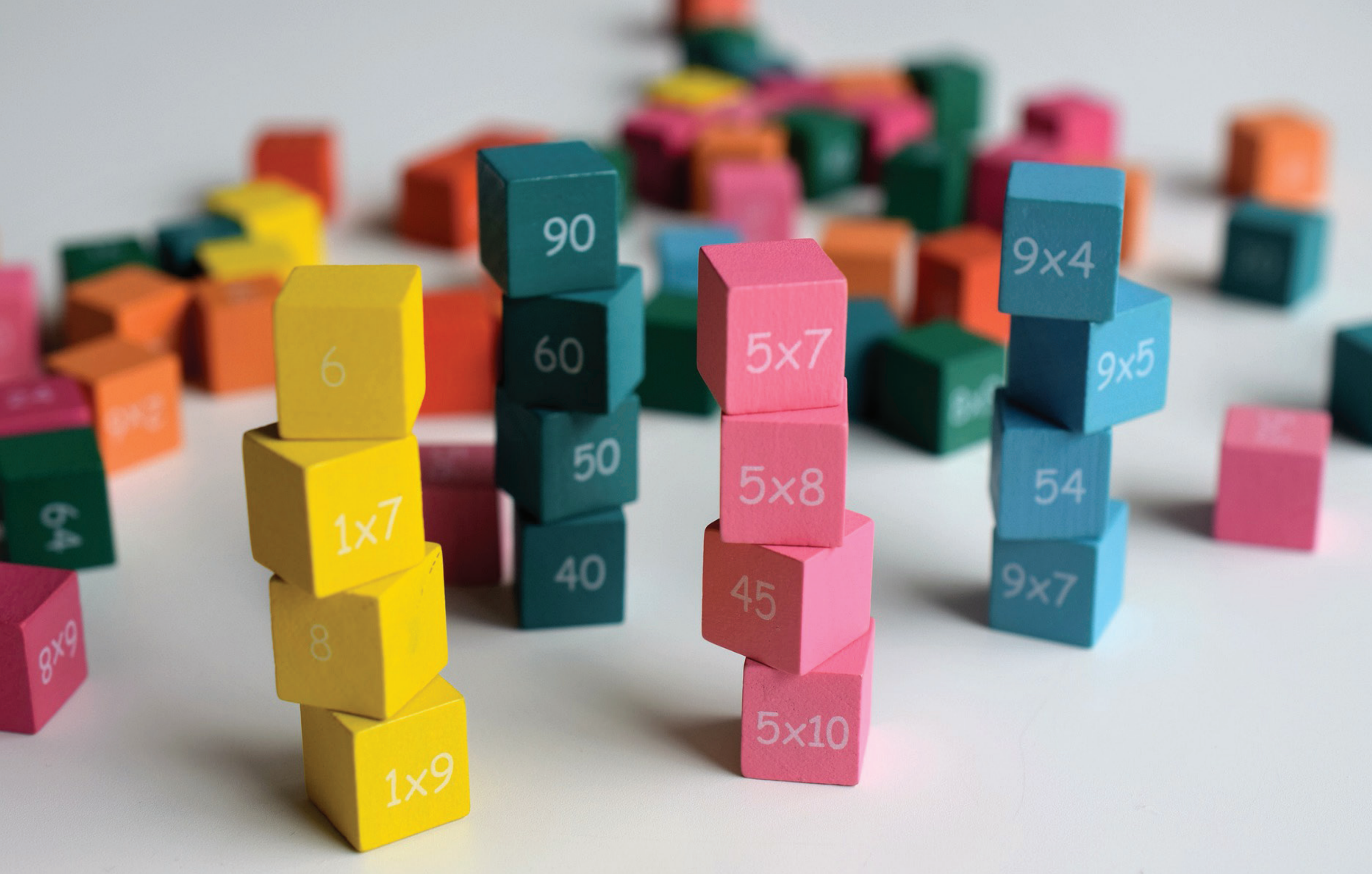
Verifique sus respuestas en el solucionario al final de la presente guía didáctica.

“Si Las matemáticas son la gimnasia del espíritu y una preparación para la filosofía"

Sócrates

¡¡Éxitos en la tarea que ha emprendido!!

Ir al solucionario



2

Segundo Bimestre

Resultado de aprendizaje	**Sabe y conoce los antecedentes y nociones generales o básicas de la Matemática**

Por medio de este resultado de aprendizaje, usted llegará a determinar la evolución de la matemática a través del tiempo e identificará los números como símbolos necesarios para el desarrollo del conocimiento de la humanidad.

En la presente unidad se conocerá los números su origen, evolución, tipos y aplicación de estos en situaciones reales, para lo cual deberá identificar, ubicar y utilizar de adecuada manera en problemas y ejercicios propuestos.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje

Algebra matricial

Semana 9

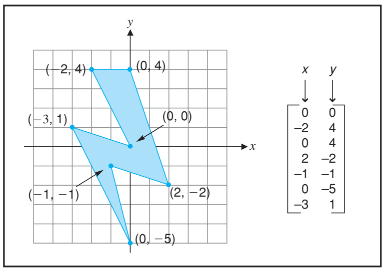
Unidad 5 "Álgebra matricial"

5 Álgebra de matrices

5.1 Teoría de matrices

Las matrices, son arreglos con los números, el álgebra respectiva tienen una aplicación potencial siempre que una información numérica se pueda acomodar de manera significativa en bloques rectangulares.

La aplicación de las matrices son variadas como el ejemplo gráfico que se observa.



Se puede resolver ecuaciones a partir de matrices y posteriormente generar determinantes.

La búsqueda de formas para describir situaciones en matemáticas y economía, condujo al estudio de arreglos rectangulares de números. Por ejemplo, considere el sistema de ecuaciones lineales que es llamado *matriz* (plural: *matrices*).

$$\begin{cases} 3x + 4y + 3z = 0, \\ 2x + y - z = 0, \\ 9x - 6y + 2z = 0. \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 9 & -6 & 2 \end{bmatrix},$$

Con frecuencia, en economía es conveniente utilizar matrices en la formulación de problemas y para exhibir datos. Por ejemplo, un fabricante que manufactura los productos A, B y C, podría representar las unidades de mano de obra y material involucrados en una semana de producción de estos artículos, de la siguiente manera:

	Producto		
	A	B	C
Mano de obra	10	12	16
Material	5	9	7

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 10 & 12 & 16 \\ 5 & 9 & 7 \end{bmatrix}.$$

Los renglones de una matriz están numerados de manera consecutiva de arriba hacia abajo, y las columnas están numeradas de manera consecutiva de izquierda a derecha. Para la matriz A anterior, tenemos

$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{ccc} \text{columna 1} & \text{columna 2} & \text{columna 3} \end{array} \\ \begin{array}{r} \text{renglón 1} \\ \text{renglón 2} \end{array} & \begin{bmatrix} 10 & 12 & 16 \\ 5 & 9 & 7 \end{bmatrix} \end{array} = \mathbf{A}.$$

Consideraremos a tales arreglos rectangulares como objetos por sí mismos; se acostumbra encerrarlos entre corchetes, y también es común que se utilicen paréntesis. En la representación simbólica de matrices usaremos letras mayúsculas en negritas como A, B, C,...

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & -2 \\ 5 & 1 & -4 \\ -3 & 5 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & -8 \end{bmatrix}$$

Una matriz e un arreglo rectangular que consiste en m reglones y n columnas, a eso se le conoce como matriz de m x n, o matriz de orden m x n, Para identificar la posición se utiliza a_{ij} en el que “i” es fila y “j” es columna. Hay matrices específicas como:

$$\boldsymbol{matriz\ reglón\ o\ vector\ regón}: \ \boldsymbol{A} = [\mathbf{1} \quad \mathbf{4} \quad \mathbf{-2}],$$

Con frecuencia, en economía es conveniente utilizar matrices en la formulación de problemas y para exhibir datos. Por ejemplo, un fabricante que manufactura los productos A, B y C, podría representar las unidades de mano de obra y material involucrados en una semana de producción de estos artículos, de la siguiente manera:

	Producto		
	A	**B**	**C**
Mano de obra	10	12	16
Material	5	9	7

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 10 & 12 & 16 \\ 5 & 9 & 7 \end{bmatrix}.$$

Los renglones de una matriz están numerados de manera consecutiva de arriba hacia abajo, y las columnas están numeradas de manera consecutiva de izquierda a derecha. Para la matriz A anterior, tenemos

$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{ccc} \text{columna 1} & \text{columna 2} & \text{columna 3} \end{array} \\ \begin{array}{r} \text{renglón 1} \\ \text{renglón 2} \end{array} & \begin{bmatrix} 10 & 12 & 16 \\ 5 & 9 & 7 \end{bmatrix} \end{array} = \mathbf{A}.$$

Consideraremos a tales arreglos rectangulares como objetos por sí mismos; se acostumbra encerrarlos entre corchetes, y también es común que se utilicen paréntesis. En la representación simbólica de matrices usaremos letras mayúsculas en negritas como A, B, C,...

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & -2 \\ 5 & 1 & -4 \\ -3 & 5 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & -8 \end{bmatrix}$$

Una matriz e un arreglo rectangular que consiste en m reglones y n columnas, a eso se le conoce como matriz de m x n, o matriz de orden m x n, Para identificar la posición se utiliza a_{ij} en el que "i" es fila y "j" es columna. Hay matrices específicas como:

matriz reglón o vector regón: $\boldsymbol{A} = [\mathbf{1} \quad \mathbf{4} \quad \mathbf{-2}]$, matriz comumna o vector columna: $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} \\ \mathbf{3} \end{bmatrix}$

Analice como nombramos a las siguientes matrices:

Recuerde:
"i" es fila y
"j" columna.

$a)\ [1 \quad 3 \quad -1], matriz\ de\ orden\ 1\ x\ 3.$

$b)\ \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, matriz\ de\ orden\ 2\ x\ 2.$

$c)\ \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -2 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, matriz\ de\ orden\ 2\ x\ 3.$

$d)\ \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -3 \\ 4 & -2 & 3 \end{bmatrix}, matriz\ de\ orden\ 3\ x\ 3.$

Se puede crear matrices de cualquier orden y si son sistemas de ecuaciones por lo general tienen una columna mas.

5.2 Igualdad de matrices

Dos matrices $A = [a_{ij}]\ y\ B = [b_{ij}]$, son iguales si y solo si, tiene el mismo orden y $a_{ij} = b_{ij}$, para cada "i" y para cada "j". Los ejemplos siguientes expresan mejor esta definición.

$$\begin{bmatrix} 2+1 & \frac{3}{3} \\ 3*5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 15 & 0 \end{bmatrix}, \text{ pero: } [1 \quad -1] \neq \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\ y\ también\ \neq [1 \quad 1] \neq [1 \quad 1 \quad 1]$$

Una ecuación matricial puede definir un sistema de ecuaciones, por ejemplo:

$$\begin{bmatrix} x & y+1 \\ 2z & 5w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Es equivalente a un sistema correspondiente:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y + 1 = 7 \\ 2z = 4 \\ 5w = 2 \end{cases}$$

Se resuelve el sistema y se tiene:
x=2, y=6, z=2, w=2/5.

Explore los ejemplos 24 y 25 del Ejercicio 6.1 de su Texto básico, para identificar sistemas de ecuaciones.

5.3 Transpuesta de una matriz

Si A es una matriz que se forma a partir de A por intercambio de sus reglones con sus columnas se conoce como la Transpuesta de A. La definición dice que la transpuesta de una matriz A de m x n, denotada como A^T, es la matriz de n x m, cuyo i-ésimo renglón es la i-esima columa de A. Así:

Dada la matriz A, encontrar su transpuesta:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, entontrar\ A^T$$

La mtriz A es de 2 x 3, de modo que A^T,es de 3 x 2. La columna 1 de A se convierte en el rengón 1 de A^T, la columna 2 se convierte en el rengón 2 y la columna 3 se convierte en el renglón 3. Así:

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Observe que las columnas de A ^{T}son los renglones de A. Debe darse cuenta de que si tomamos la transpuesta de nuestra respuesta, obtendremos la matriz original A. Esto es, la operación transpuesta tiene la propiedad de que, $(A^T)^T = A$.

Recuerde:
La matriz cuadrada es n x n,: la matriz A de 3 x 3, sería:

$$A= \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ -1 & 2- & 4 \end{bmatrix}$$

Recuerde:
La matriz cero debe especificar el orden, por ejemplo: la matriz 0 de 2 x 3, sería:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Explore el Ejercicio 6.1 de su Texto básico, sobre el orden de matrices.

Recuerde:
La matriz diagonal es cuadrada, así:

$$A= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

5.4 Operaciones básicas con matrices

Las siguientes operaciones básicas se cumplen también con las matrices:

Propiedades para la suma de matrices

1. $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$	(propiedad conmutativa),
2. $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$	(propiedad asociativa),
3. $\mathbf{A} + \mathbf{O} = \mathbf{O} + \mathbf{A} = \mathbf{A}$	(propiedad del neutro aditivo).

Si las matrices tienen el mismo orden, entonces las propiedades siguientes se cumplen.

5.4.1 Suma de matrices

Se da las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Encontrar A + B

$$A + B = \begin{bmatrix} 1+0 & 2+3 & 1+3 \\ 0+1 & 2+1 & 2-1 \\ -1-2 & 3-3 & 0+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A + B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix},} \quad \textbf{Rta.}$$

Ejemplo 48

Dada las matrices A, B, C, encuentre el valor de A+B+C:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Agrupe (A+B)+C, aplicando la propiedad asociativa:

$$A + B = \begin{bmatrix} 1-2 & -2-1 \\ 0+1 & -1+3 \end{bmatrix} + C = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + C = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A + B + C = \begin{bmatrix} -1+0 & -3+2 \\ 1+2 & 2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Reduciendo términos semejantes, así:

$$\boldsymbol{A + B + C = \begin{bmatrix} -1 & .1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}}, \quad \boldsymbol{Rta.}$$

Ejemplo 49

Dada los vectores A, B, encuentre el valor de A+B:

$$A = [1 \quad 2 \quad 3], \quad B = [2 \quad -4 \quad -6]$$

A+B= $[1+2 \quad 2-4 \quad 3-6] = [3 \quad -2 \quad -3]$

Reduciendo términos semejantes, así:

$$A + B = [3 \quad -2 \quad -3], \quad Rta.$$

Recuerde:
La suma de matrices, se opera sumando algebraicamente las posiciones respectivas.

5.4.2 Multiplicación por un escalar

Al tener un escalar, este se multiplica con cada uno de los términos que coforman la matriz, las propiedades siguientes son necesarias de comprender y dominar en su aplicación:

Propiedades de la multiplicación por un escalar

1. $k(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = k\mathbf{A} + k\mathbf{B}$.
2. $(k_1 + k_2)\mathbf{A} = k_1\mathbf{A} + k_2\mathbf{A}$.
3. $k_1(k_2\mathbf{A}) = (k_1k_2)\mathbf{A}$.
4. $0\mathbf{A} = \mathbf{O}$.
5. $k\mathbf{O} = \mathbf{O}$.

fíjese en el ejemplo siguiente:

Multiplique cinco veces a la matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 9 & -2 \end{bmatrix}$

$$5A = 5\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 9 & -2 \end{bmatrix}$$

$$5A = \begin{bmatrix} 5*3 & 5*6 \\ 5*9 & 5*-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 30 \\ 45 & -10 \end{bmatrix}$$

Operando la multiplicación para cada posición por el escalar, da:

$$\mathbf{5A = \begin{bmatrix} 15 & 30 \\ 45 & -10 \end{bmatrix}}, \quad \boldsymbol{Rta.}$$

Ejemplo 50

Dada los vectores A, B, encuentre el valor de -2A+3B:

$$A = [1 \quad 2 \quad 3], \quad B = [2 \quad -4 \quad -6]$$

Expresemos las multiplicaciones:

-2A$= -2[1 \quad 2 \quad 3], \quad 3B = 3[2 \quad -4 \quad -6]$

$$-2A + 3B = [-2*1 \quad -2*2 \quad -2*3] + [3*2 \quad 3*-4 \quad 3*-6]$$

$$-2A + 3B = [-2 \quad -4 \quad -6] + [6 \quad -12 \quad -18]$$

Ahora ya puede sumar, asi:

$$-2A + 3B = [-2+6 \quad -4-12 \quad -6-18]$$

Reduciendo términos semejantes así:

$$-2A + 3B = [4 \quad -16 \quad -24]$$

$$\mathbf{-2A + 3B = [4 \quad -16 \quad -24]}, \quad \boldsymbol{Rta.}$$

5.4.3 Sustracción de matrices

Aquí hay que introducir el concepto del **Negativo de una matriz,** que no es más, que multiplicar por el escalar – 1. La siguiente propiedad se hace necesario que domine:

$$-\mathbf{A} = (-1)\mathbf{A}.$$

Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$, encuentre el negativo de la matriz A.

$$-A = -1\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1*2 & -1*-3 \\ -1*-4 & -1*1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{-A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}}, \quad \boldsymbol{Rta.}$$

Ejemplo 51

Dada los vectores A, B, encuentre el valor de $A^T - 2B$:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Encuentre la Transpuesta de la matriz A:

$$A^T = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, y \quad 2B = \begin{bmatrix} 2*3 & 2*-3 \\ 2*1 & 2*2 \end{bmatrix}$$

Para la transpuesta la fila ocupa la columna y multiplicamos B por 2

Encuentre – 2B, despues de multiplicar cada entrada, así:

$$2B = \begin{bmatrix} 6 & -6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, el - 2B\ sería: \quad -2B = \begin{bmatrix} -6 & 6 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$$

Finalmente operando algebraicamente tiene:

$$A^T - 2B = \begin{bmatrix} 6-6 & 2-6 \\ 0-2 & -1-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}$$

Reduciendo términos semejantes:

Recuerde:
La transpuesta de una matriz se caracteriza por escribir la fila en columna.

Ejemplo 52

Resolver la ecuación siguiente:

$$2\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = 5\begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Multipliquemos lo expreado, así:

$$\begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ -20 \end{bmatrix}$$

Restando las dos matrices primeras, así:

$$\begin{bmatrix} 2x_1 - 3 \\ 2x_2 - 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ -20 \end{bmatrix}$$

Por la igualdad de matrices podemos escribir asì:

$$2x_1 - 3 = 25, de\ aquí, \quad x_1 = 14.$$

$$2x_1 - 4 = -20, de\ aquí, \quad x_2 = -8$$

$$\boldsymbol{x_1 = 14, y \quad x_2 = -8, \quad Rta.}$$

Explore los ejemplos del 1 al 11, del Ejercicio 6.2 de su Texto básico,
Resuelva los ejemplos del 25 al 28, del mismo texto básico.
Resuelva los ejemplos del 32 al 33, del mismo texto básico.
Explore los ejemplos 35, 36, 27, del mismo texto, le servirán

Autoevaluación 5.9

Lea y responda en el espacio entre paréntesis si es verdadera con “V” o falsa con “F”.

1.-	( )	La matriz 3 x 4, tiene 3 filas y 4 columnas.
2.-	(F)	El matriz de 2 x 3, tiene 2 comunas y 3 filas
3.-	(F)	$Sumando\ las\ matrices: \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-2\\-1\end{bmatrix}, se\ obtiene: \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$
4.-	( )	$Matricialmente\ 2\begin{bmatrix}2 & 2\\3 & -3\end{bmatrix}; es\ equivalente\ a: \begin{bmatrix}4 & 4\\6 & -6\end{bmatrix}$
5.-	( )	$Matricialmente\ 1\begin{bmatrix}2 & 2\\3 & -3\end{bmatrix}; es\ equivalente\ a: \begin{bmatrix}2 & 2\\3 & -3\end{bmatrix}$
6.-	( )	$Matricialmente\ \begin{bmatrix}2 & 2\\3 & -3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}2 & 2\\3 & -3\end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix}2 & 2\\3 & -3\end{bmatrix}$
7.-	( )	La matriz transpuesta de: $\begin{bmatrix}2 & 2\\3 & -3\end{bmatrix}, es: \begin{bmatrix}2 & 3\\2 & -3\end{bmatrix}$
8.-	(F)	La multiplicación de: $0\begin{bmatrix}2 & 2\\3 & -3\end{bmatrix}, es: [0]$

Verifique sus respuestas en el solucionario al final de la presente guía didáctica.

“La vida es buena por sólo dos cosas, descubrir y enseñar las matemáticas”

Simeón Poisson

¡¡Éxitos en la tarea que ha emprendido!!

Ir al solucionario

Resultado de aprendizaje 10

Utiliza la abstracción como una habilidad adquirida para sintetizar y analizar las situaciones propuestas.

En esta semana usted llegará a identificar expresiones denominadas matrices, esto es aquellas que presentan arreglos y llegar a resolver ejercicios estimados y considerados como ecuaciones que conllevan el uso de matrices con las operaciones básicas con matrices suma y multiplicación de matrices y la respectiva simplificación.

Conocerá y dominará la metodología que a partir de operaciones básicas determinará garantizando que domina la resolución de matrices y simplifica expresiones mediante los ordenamientos adecuados, encontrará respuestas coherentes.

La eliminación de números a partir de eliminar los términos por simples operaciones aritméticas y obtener ecuaciones sencillas que le llevan a resolver sistemas de ecuaciones complejas.

Con el conocimiento de la metodología de resolución de ecuaciones con literales y aún con mas complejidad cuando conlleva expresiones racionales, con otras equivalentes que permitan mejor su resolución y aplicación óptima de matrices.

Finalmente traducirá un lenguaje algebraico de sistemas de ecuaciones a sistemas matriciales para ser resueltos con las propiedades y reglas del álgebra matricial.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje

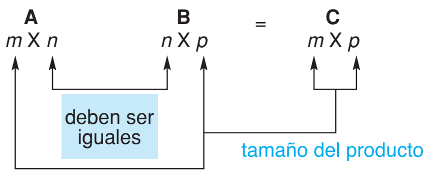
Semana 10

5.5 Multiplicación de matrices

5.5.1Multiplicación entre matrices

Para la multiplicación entre dos matrices A y B, es necesario que el número de columnas de A, sea igual al número de filas o renglones de B. La definición diría:

A partir de una matriz "A" de $m \ x \ n$ y "B" otra matriz n x p. el producto AB es la matriz "C" de m x p cuya entrada c_{ij}, en el renglón "i" y la columna "j", se obtiene de la siguiente manera: sume los productos formados al multiplicar, el renglón "i" de A por la correspondiente columna "j" de "B". Fíjese en el siguiente esquema:



El siguiente ejemplo de aclara todo, sean las matrices A y B en cuentre de ser poisble el producto AB.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -6 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}, y \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, encuentre\ el\ producto\ AB.$$

Puede notar que el número de columnas de A es igual al número de filas de B, por lo tanto si se puede obtener el producto, operando de la siguiente manera:

$$AB$$
$$= \begin{bmatrix} (2*1)+(1*0)+(-6*-2) & (2*0)+(1*4)+(-6*1) & (2*-3)+(1*2)+(-6*1) \\ (1*1)+(-3*0)+(2*-2) & (1*0)+(-3*4)+(2*1) & (1*-3)+(-3*2)+(2*1) \end{bmatrix}$$

Resolviendo las operaciones indicadas y los términos semejantes quedaría:

$$AB = \begin{bmatrix} (2)+(0)+(12) & (0)+(4)+(-6) & (-6)+(2)+(-6) \\ (1)+(0)+(-4) & (0)+(-12)+(2) & (-3)+(-6)+(2) \end{bmatrix}$$

y finalmente el producto da:

$$\boldsymbol{AB = \begin{bmatrix} 14 & -2 & -10 \\ -3 & -10 & -7 \end{bmatrix}, \quad Rta.}$$

Recuerde:
La propiedad conmutativa de matrices no está definida o no se cumple, es decir AB es diferente de BA. La razón es muy simple pues no cumple el número de columnas que sea igual al numero de filas.

Ejemplo 53

Resolver la multiplicación siguiente:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Una fila y una columna, son multiplicables, así:

$[(3*6)+(2*5)+(1*4)]$=$[18+10+4]$

Reduciendo términos semejantes tenemos:

$$[\mathbf{32}], \quad \boldsymbol{Rta.}$$

Ejemplo 54

Resolver la multiplicación siguiente:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Dos filas y dos columnaa, son multiplicables, así:

$$\begin{bmatrix} (2*-2)+(-1*1) & (2*1)+(-1*4) \\ (3*-2)+(1*1) & (3*1)+(1*4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4-1 & 2-4 \\ -6+1 & 3+4 \end{bmatrix}$$

Reduciendo términos semejantes tenemos:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{-5} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{-5} & \mathbf{7} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{Rta.}$$

Las propiedades de la multiplicación se presentan así:

Propiedades de la multiplicación de matrices

1. $\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$ (propiedad asociativa),
2. $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC},$ (propiedades distributivas).

   $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$

5.6 La matriz identidad

Es aquella matriz cuya diagonal tiene solo números uno. Son ejemplos los siguientes:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{I}^{\mathrm{T}} = \mathbf{I}.$$

El producto de la matriz identidad por una matriz es la misma matriz. Así:

Ejemplo 55

Resolver la multiplicación siguiente:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} * I$$

Dos filas y dos columnaa de la matriz identidad, son multiplicables, así:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2 * 1) + (-1 * 0) & (2 * 0) + (-1 * 1) \\ (3 * 1) + (1 * 0) & (3 * 0) + (1 * 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Reduciendo términos semejantes tenemos:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{Rta.}$$

5.7 Operaciones matriciales.

Con las matrices, también se puede utilizar los sistemas de ecuaciones. La forma matricial será: AX=B. donde A es la matriz de coeficientes, X, la matriz de incógnitas o variables y B la matriz de términos independientes.

Escribir el sistema siguiente en forma matricial.

$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 4 \\ 8x_1 + 3x_2 = 7 \end{cases}$, este sistema es equivalente a la ecuación matricial siguiente:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad y \quad B = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

AX=B

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Se recomienda explore el Ejercicio 6.3 de su Texto guía y:
Resuelva los ejemplos del 8 al 10 del mismo texto básico.
Resuelva los ejemplos del 25 al 30 del mismo texto básico.
En los ejemplos 59, 60, 61 represente el sistema mediante las respectivas ecuaciones matriciales correspondientes.

Solución de un sistema de ecuaciones lineales por Reducción

Dado el sistema:

$$\begin{cases} 2x + 3y = -1 \\ 2x + y = 5 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

Es permitido:

Intercambiar filas, intercambiar columnas, multiplicar por un escalar una fila o una columna y sumarla o restarla de otra. Finalmente es tratar de conseguir la mayor cantidad de ceros en la matriz, para que se pueda leer directamente el valor de las incógnitas. De lo siguiente manera: Obtener la matriz aumentada que son los coeficientes y los términos independientes:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{Intercambiar\ la\ F1\ por\ la\ F3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-2F1 + F2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-2F1 + F3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-2F1+F3}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 3\\ 0 & 1 & -3\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-1F2}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -3\\ 0 & 1 & -3\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-F2+F1}\begin{bmatrix}1 & 0 & 4\\ 0 & 1 & -3\\ 0 & 1 & -3\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-F1+F3}\begin{bmatrix}1 & 0 & 4\\ 0 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Pasemos al sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x+0y=4\\ 0x+y=-3\\ 0x+0y=0\end{cases}$$

Tenemos:

$$\boldsymbol{x=4}$$
$$\boldsymbol{y=-3'}\quad \boldsymbol{Rta.}$$

Se recomienda explore el Ejercicio 6.4 de su Texto guía y:
Resuelva los ejemplos del 14 al 20

Se ha concluido el estudio de esta unidad, siempre le recomiendo revisar lo recomendado hasta que domine el tema en particular y detalles que usted confirma necesita mejorar y así conocer su nivel de conocimientos.

A continuación, le invito a desarrollar la siguiente autoevaluación, cuyo objetivo es conocer cuánto usted ha comprendido del tema, además podrá revisar en la sección del solucionario, la retroalimentación de cada pregunta.

Estoy seguro de que le irá ¡muy bien!

Autoevaluación 5.10

Lea y responda en el espacio entre paréntesis si es verdadera con "V" o falsa con "F".

1.-	( )	La matriz 3 x 4, tiene 3 filas y 4 columnas.
2.-	( )	El sistema: $\begin{cases} x+2y=8 \\ 2x+4y=-4 \end{cases}$; *es equivalente a*: $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 8 \\ -4 \end{bmatrix}$
3.-	( )	$Matricialmente\ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 8 \\ -4 \end{bmatrix}, genera\ el\ sistema: \begin{cases} x+2y=8 \\ 2x+4y=-4 \end{cases};$
4.-	( )	$Matricialmente\ \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}, genera\ el\ sistema: \begin{cases} 2x+2y=1 \\ 3x-3y=4 \end{cases};$
5.-	( )	El sistema: $\begin{cases} 2y=1 \\ x+y=-1 \end{cases}$; *es equivalente a*: $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$
6.-	( )	La siguiente expresión: -1$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$, *es*: $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$
7.-	( )	Multiplicando: $[-2 \quad 3]\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, *se tiene*: $[-5 \quad 1]$
8.-	( )	La matriz: $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, *tiene como reducida*: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

Verifique sus respuestas en el solucionario al final de la presente guía didáctica.

"El estudio de las matemáticas, como el Nilo comienza con minuciosidad y termina con magnificencia"

Caleb Colton

¡¡Éxitos en la tarea que ha emprendido!!

Ir al solucionario

Resultado de aprendizaje 11

Utiliza la abstracción como una habilidad adquirida para sintetizar y analizar situaciones propuestas que pueden ser modeladas matemáticamente.

En esta semana usted llegará a dominar y a comprender aplicando a situaciones reales sobre las funciones y sus propiedades, comprenderá acercándose a que un modelo a mas de ser físico, podría ser matemática y reemplazar una situación real de funcionamiento de algún proceso o mecanismo industrial con la herramienta funciones.

Conocerá los valores que pueden ser calculados y cuales no cumplen criterios de selección, además reconocerá rangos de cantidades a ser tomadas en cuenta en casos inexistentes para cuyas situaciones no hay manera de modelar por simple sentido común.

Finalmente, con el conocimiento de la metodología de funciones, identificará aquellas que son lineales de las cuadráticas o de orden superior, identificará puntos notables, puntos de intersección, vértices el uso y funcionamiento de una línea recta y de la parábola como figura de representación cuadrática, con el número de respuestas reconociendo cuales son soluciones reales o no.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje

Algebra de funciones

Semana 11

Unidad 6 "Operaciones con funciones"

6 Funciones y operaciones

6.1 Funciones

El cálculo fue inventado por Leibniz, en el siglo XVII, y además introdujo las funciones en la matemática y fue la base para el estudio del cálculo diferencial. La función es una relación en la que se tiene una "salida" debido a que se introdujo una "entrada".

Un ejemplo que ayuda es cuando se tiene el Monto de una inversión que sería "salida" y que al brindar un Capital "entrada" que pasa por un proceso que para el ejemplo sería una tasa de interés y el tiempo, cuando esta inversión se encuentre invertida, se dice que el capital de inversión es una "función" del tiempo. Todo lo expresado se puede modelar con una expresión matemática que se denomina función y que por ella se tiene una salida

Para ejemplificar esto, una inversión de $1000, oo (C), colocada a 5% (i), anual genera un Monto durante un plazo "t", estas variables se modelan con la siguiente ecuación:

$$M = C(1 + it)$$

Si la entrada t es 2 años, la función arroja una salida M de $1100, oo, es decir que haciendo variar "t" generaría uno y solo un valor de M,

Una función entonces es una regla que asigna a cada variable de entrada exactamente un valor de salida. Al conjunto de valores de entrada se los llama "dominio" y el conjunto de valores de salida se denomina "recorrido o rango, una tabla podría explicar lo expresado. Fíjese.

entrada	función	salida
t		M
1		1050, oo
2	C(1+it))	1100, oo
3		1150, oo
4		2000, oo

Como se puede hacer variar los valores de la entrada, se dice que es una "variable independiente" y como los valores de salida requieren de un proceso lo denominamos "variable dependiente". Un ejemplo es el siguiente:

$$y = 2x - 1$$

que se escribe en lenguaje de función como:

$$y = f(x)$$

$f(x)$, que se lee "f de x", representa el número de salida en el rango de f que corresponde al número de entrada x en el dominio.

$$\begin{array}{c} \text{entrada} \\ \downarrow \\ \underbrace{f(x)} \\ \uparrow \\ \text{salida} \end{array}$$

Si al valor de la entrada le multiplico por 2 y a ese valor le resto 1, obtenga un valor de "y" o de la función.

Se puede escribir como $f(x) = 2x - 1$

Tome en cuenta que f(x) no es "f" por "x" es el valor de "y", al procesar o

Digamos que se tiene la función $h(x) = x + x^2$, quiere decir que a cada valor "x" de entrada le asigna un número de salida $x + x^2$. Una forma de expresar esto es así:

$$h(2) = 2 + 2^2 = 6$$

$$h(-1) = (-1) + (-1)^2 = 0$$

$$h(3) = 3 + 3^2 = 12$$

$$h(x+2) = (x+2) + (x+2)^2 = x + 2 + x^2 + 2x + 4 = x^2 + 3x + 6$$

$$h(a+1) = (a+1) + (a+1)^2$$

6.2 Domínio de una función

Son todos los valores pisibles que puede tomar la viariable independiente "x" Aplique este concepto al siguiente ejemplo:

$$f(x) = \frac{2}{x-5}, Esata\ función\ puede\ tomar\ cualquier\ valor\ excepto\ el\ 5$$

Por tanto el Dominio, de la función "f(x)" son todos los números reales excepto el 5.

Ejemplo 56

Encuentre el dominio de la siguiente función:

$$f(x) = \frac{x}{x^2-1},$$

Factore el denominador

$$f(x) = \frac{x}{(x+1)(x-1)}$$

$$los\ valores\ que\ hacen\ cero\ el\ denominador\ son: x = -1\ y\ x = 1$$

$$Estos\ valores\ hacen\ cero\ el\ denominador$$

La división entre cero no está definida en matemática, por lo tanto.

El Dominio de la función son todos los reales excepto el 1 y el -1.

6.3 Recorrido o Rango de una función

Son todos los valores que adquiere la variable dependiente "y", o los que resultan de aplicar a la función los valores del Dominio, el ejemplo siguiente le ayudará a comprender:

Encuentre el dominio y rango de $f(x) = x^2 + 4$. Analice también los ejemplos 4 y 5 de la página 92 de su Texto básico.

Ejemplo 57

Encuentre el recorrido o rango de la función:

$$f(x) = \frac{x}{x-1},$$

$$f(x) = \frac{x}{(x-1)}$$

$$el\ valor\ que\ hacen\ cero\ el\ denominador\ es: x = 1$$

$$f(1) = \frac{1}{1-1} hace\ cero\ el\ denominador$$

La división entre cero no está definida en matemática, por lo tanto.

El Rango o Recorrido de la función son todos los reales mayores que el 1.

6.4 Funciones especiales

Estas funciones se caracterizan por alguna representación única, entre las que se tiene:

6.4.1 Función constante

Aquella con la cual todos los valores que adquiera la variable dará coomo resultado una constante o un valor igual siempre para cualquier valor del diminio.

La forma general es:

$$f(x) = c = constante$$

Son ejemplos los siguientes:

$$h(2) = 1, \quad g(22) = 2, \quad f(-1) = 2, \quad f(x+3) = 2$$

Recuerde:
La función constante siempre tiene un valor, independiente al valor que tome la variable.

6.4.2 Función polinómica

Se caracteriza por que en el modelo siguiente "n" es un entero y no puede ser negativo, los coeficientes "c", no pueden ser cero y el exponente "n" mayor da el grado a la función.

Finalmente el coeficiente principal es aquel que acompaña a la variable con mayor "n".

$$f(x) = C_n x^n + C_{n-1}x^{n-1} + C_{n-2}x^{n-2} + \cdots + C_1 x + C_0$$

Son ejemplos los siguientes:

$f(x) = 3x^4 + x - 1$	Es una función polinómica con coeficiente principal "3" y de grado "4".
$g(x) = -1x^2 - 1$	Es una función polinómica con coeficiente principal "-1" y de grado "2".
$h(w) = \frac{1}{3}w - \frac{2}{5}w^2 - 1$	Es una función polinómica con coeficiente principal "$\frac{-2}{5}$" y de grado "2".

6.4.3 Función racional

Es aquella que el numerador y el denimonador son funciones polinómicas, esto es:

$f(x) = \frac{x+2}{x^2-1}$, esta función se cumple para todos los valores excepto para x=1 y x=-1.

El siguiente ejemplo tiene una novedad:

$$f(x) = x^3 - 2x - 8, \mathit{Es\ también\ una\ función\ racioanl\ pues\ cumple}:$$

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x - 8}{1}$$

$f(x) = x^4 + x$	Es una función racional, con coeficiente principal "1" y de grado "4".
$g(x) = \frac{2x^3 - x - 5}{x^2}$	Es una función racional con coeficiente principal "2" y de grado "3".
$h(w) = \frac{1}{3}w - w^2 - 1$	Es una función racional con coeficiente principal "1" y de grado "2".

6.4.4 Función compuesta

Este tipo de función debe cumplir simultáneamente varias condiciones, fíjese en el ejemplo siguiente:

$$G(x) = \begin{cases} x-2, & si\ 2 < x \leq 8 \\ 0, & si\ 1 \leq x \leq 2 \\ 1, & si\ -1 \leq x < 1 \end{cases}$$

Si determinamos G(0): cumple $-1 \leq 0 < 1, por\ lo\ tanto\ G(0) = 1$

Si determinamos G(6): cumple $2 < 6 \leq 8, por\ lo\ tanto\ G(6) = 6 - 2 = 4$

Revise y resuelva de la página 98 de su Texto básico. los ejemplos del 2 al 26

6.5 Algebra de funciones

Las funciones se dejan combinar para generar una función diferente y nueva, para esto se pueden sumar, restar, multiplicar y dividir. Además entonces como es una álgebra de funciones se cumplen las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &= f(x) + g(x), \\ (f-g)(x) &= f(x) - g(x), \\ (fg)(x) &= f(x) \cdot g(x), \\ \frac{f}{g}(x) &= \frac{f(x)}{g(x)}. \end{aligned}$$

Fíjese en los siguientes ejemplos:

Dado $f(x) = 2x^2, \quad y. \quad g(x) = 6x$

Sumando las funciones por la propiedad:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = 2x^2 + 6x$$

Entonces para x=2: $(f+g)(2) = 2(2)^2 + 6(2) = 8 + 12 = 20$

$$\boldsymbol{(f+g)(2) = 20, \quad Rta.}$$

Ejemplo 58

Encuentre el resultado de: $\frac{f}{g}(x), para\ x = -1, dado$:

$$f(x) = x^4,$$

$$g(x) = 2x^2$$

Aplique la propiedad del cociente, así:

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^4}{2x^2} = \frac{x^2}{2}$$

$$\frac{f}{g}(-1) = \frac{(-1)^2}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\boldsymbol{\frac{f}{g}(-1) = \frac{1}{2}}, \quad \boldsymbol{Rta.}$$

Recuerde:
El álgebra de los números reales y sus propiedades respecto de operaciones básicas es aplicable también a las funciones. .

Revise y resuelva de la página 100 de su Texto básico, el Ejercicio 3.3, 1, los ejercicios completos 1 y 3.

Se ha concluido el estudio de esta unidad, siempre le recomiendo revisar lo recomendado hasta que domine el tema en particular y detalles que usted confirma necesita mejorar y así conocer su nivel de conocimientos.

A continuación, le invito a desarrollar la siguiente autoevaluación, cuyo objetivo es conocer cuánto usted ha comprendido del tema, además podrá revisar en la sección del solucionario, la retroalimentación de cada pregunta.

Estoy seguro de que le irá ¡muy bien!

Autoevaluación 6.11

Lea y responda en el espacio entre paréntesis si es verdadera con “V” o falsa con “F”.

1.-	( )	Dada la función $f(x) = 2x, el\ dominio\ son\ todos\ los\ Reales$..
2.-	( )	Dada la función h(x)= $\frac{2}{x}, el\ dominio\ son\ los\ reales$ sin $el\ cero.$
3.-	( )	Dada la función $f(x) = 2x, el\ rango\ son\ todos\ los\ reales$
4.-	( )	Dada la función $f(3) = 2,\ \ f(5) = 2;\ \ es\ una\ función\ constante$
5.-	( )	La función $h(x) = x^2 - 3x^3 + 1$, tiene como coeficiente principal a -3
6.-	( )	La función: $f(x) = x^3, no\ es\ una\ función\ racional$
7.-	( )	La combinación de $(fg)(x), no\ es\ lo\ mismo\ que\ f(x) * g(x)$
8.-	( )	Si: $f(x) = x, \quad y. \quad g(x) = (x^2 + 1)$, entonces: $\left(\frac{f}{g}\right)(0) = 1$

Verifique sus respuestas en el solucionario al final de la presente guía didáctica.

“En las matemáticas no entiendes las cosas. Te acostumbras a ellas”

Johan Neumann

¡¡Éxitos en la tarea que ha emprendido!!

Ir al solucionario

Resultado de aprendizaje 12

Utiliza la abstracción como una habilidad adquirida para sintetizar y analizar situaciones propuestas que pueden ser modeladas matemáticamente. .

Usted llegará a dominar y a comprender aplicando a situaciones reales sobre las funciones y sus propiedades, comprenderá acercándose a que un modelo a mas de ser físico, podría ser matemática y reemplazar una situación real de funcionamiento de algún proceso o mecanismo industrial con la herramienta funciones.

Conocerá las aplicaciones de las funciones lineales como son el concepto de la pendiente, la inclinación de la recta y su aplicación en realidades de incremento o decremento de valores aplicando a pagos, decaimiento de valores o a su vez funcionalidades crecientes. Identificará puntos de intersección y la identificación de puntos mediante coordenadas que satisfacen una función lineal.

De igual manera para la función cuadrática, identificar el mínimo y máximo como valores significativos además de calcular puntos notables y proyectar como la función continua. .

Finalmente, con el conocimiento de la metodología de funciones, identificará aquellas que son lineales de las cuadráticas o de orden superior.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje

Semana 12

6.6 Graficación de funciones

Para apreciar la funcionalidad de las funciones siempre es necesario graficar las mismas en un sistema coordenado. Las coordenadas mas empleadas son las rectangulares. Toda función tiene su esquema que lo caracteriza y lo generaliza así por ejemplo una funión lineal generará una línea, una cuadrática una parábola etc, a esto se puede añadir ciertos puntos notables o peculiares.

Analiza como se representaron los siguientes puntos:

$(0;3)$

$(3;2)$

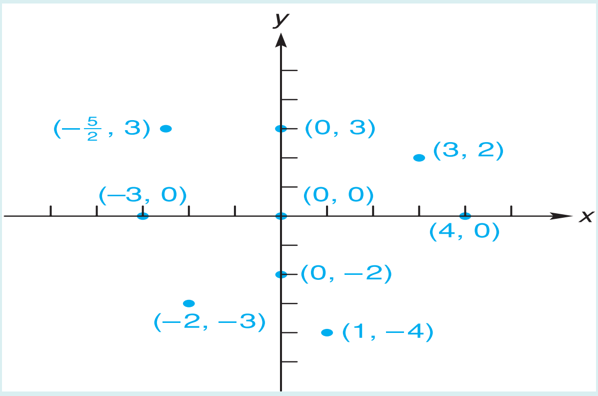
$(4;0)$

$(0;-2)$

$(1;-4)$

$(-2;-3)$

$(-3;0)$



Si se pueden representar puntos o mejor dicho un par ordenado, las funciones entonces se dejan graficar también de manera precisa y arrojando figuras típicas y de fácil esquematización, en estas figuras o gráficas se podrán identificar puntos característicos como por ejemplo, vértices, intersecciones, tendencias entre otras cualidades que tienen las funcione cuando son graficadas.

El orden o grado de una función determina también la gráfica de la misma, por ejemplo una función de grado uno, genera una linea recta, por eso se denomina función lineal, si es de segundo grado, genera una parábola o denominada función cuadrática.

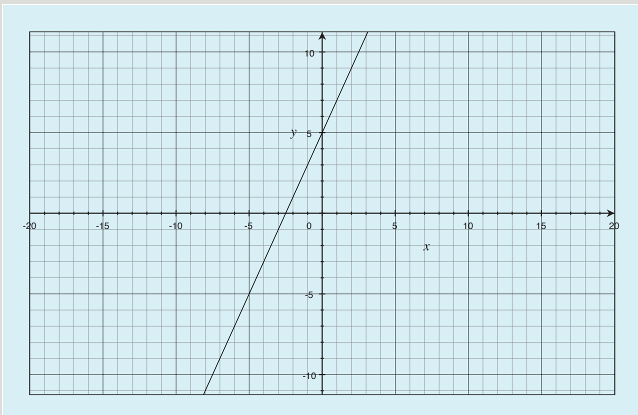
A continuación el proceso de como graficar una función y llegar a reconocer a la función que pertenece.

Tiene la siguiente función: $f(x) = 2x + 5$, Remplazamos por una ecuación de la siguiente manera: $y = 2x + 5$, Puede obserbar que es de primer grado pues el exponente de la variable independiente es “1”. Dispongamos de una tabla y empezemos a dar valores a “x” y obtener los valores de “y”, así:

Valores a asignar a “x”	Función como ecuación $y = 2x + 5,$	Valor obtenido para” y”
x=0	$y = 2(0) + 5,$	y=5
x=1	$y = 2(1) + 5,$	y=7
x=4	$y = 2(4) + 5,$	y=13
x=-1	$y = 2(-1) + 5,$	y=3
Y puede seguir obteniendo mas valores para “y”, estos valores se pueden resumir en una tabla y graficar en coordenadas rectangulares.		

$$\boldsymbol{f(x) = y = 2x + 5}$$

x	y
-2	1
-1	3
0	5
1	7
2	9
3	11



La función lineal arroja una línea recta

En el eje “y” corta la curva en la coordenada (0;5)

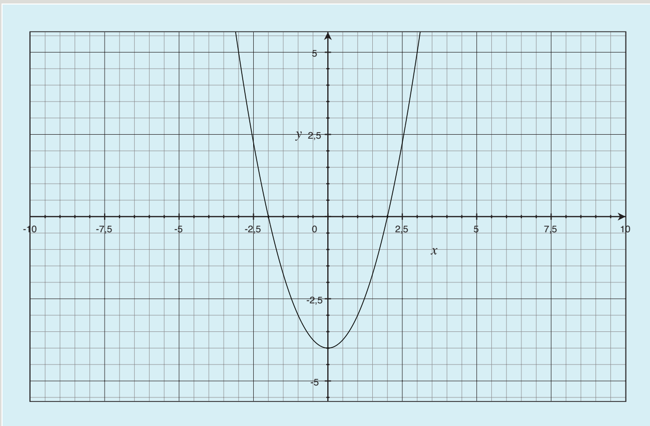
En el eje “x” corta la curva en la coordenada (-2,5;0)

Otra función $f(x) = x^2 + 2$, aplicando la misma metodología tenemos:

Valores a asignar a "x"	Función como ecuación $y = x^2 - 4,$	Valor obtenido para" y"
x=0	$y = (0)^2 - 4,$	y=-4
x=1	$y = (1)^2 - 4,$	y=-3
x=4	$y = (2)^2 - 4,,$	y=0
x=-1	$y = (-1)^2 - 4,$	y=-3
x=-2	$y = (-2)^2 - 4,$	y=0
Y puede seguir obteniendo mas valores para "y", estos valores se pueden resumir en una tabla y graficar en coordenadas rectangulares.		

$$\boldsymbol{f(x) = y = x^2 - 4}$$

x	y
-2	6
-1	3
0	2
1	3
2	6
3	11



La función cuadrática arroja una parábola

En el eje "y" corta la curva en la coordenada (0;-4)

En el eje "x" corta la curva en la coordenada (-2;0) y (2;0)

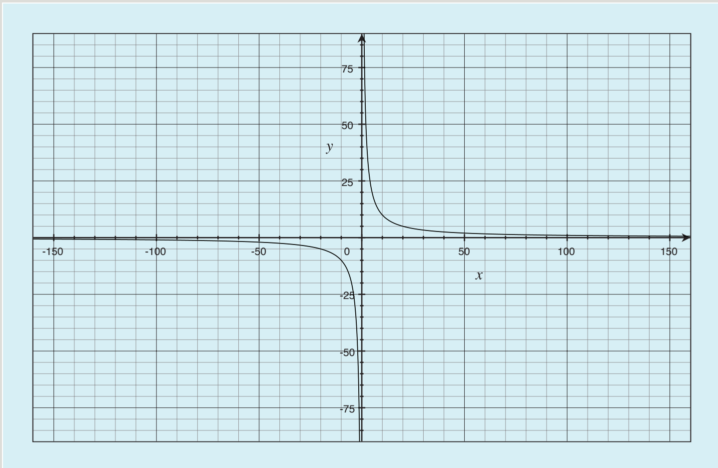
Otro ejemplo puede ser la función: $f(x) = \frac{100}{x}$, apliquemos la metodología asï:

Valores a asignar a "x"	Función como ecuación $y = \dfrac{100}{x},$	Valor obtenido para" y"
x=0	$y = \dfrac{100}{0},$	y= infinito
x=1	$y = \dfrac{100}{1}$	y=100
x=4	$y = \dfrac{100}{4}$	y=25

x=10	$y = \frac{100}{10}$	y=10
x=-4	$y = \frac{100}{-4}$	y=-25
x=-10	$y = \frac{100}{-10}$	y=-10
Y puede seguir obteniendo mas valores para “y”, estos valores se pueden resumir en una tabla y graficar en coordenadas rectangulares.		

$$f(x) = y = \frac{100}{x}$$

x	y
0	infinito
1	100
4	25
10	10
-1	-100
-4	-25



La función racional arroja una hipérbole

En el eje “y” No corta la curva.

En el eje “x” No corta la curva

Recuerde:
Siempre se puede representar una función y con la gráfica tener una idea mucho mas cercana de valores característicos a una situación real. . .

Revise y resuelva de la página 112 de su Texto básico, el Ejercicio 3.4, los ejercicios completos 5 y 6.

6.7 Función lineal

Como ya se dijo, la función lineal se expresa con una línea recta y ahora analizaremos ciertos modelos que se presentan en este tipo de función, para ello aparecen ciertas peculiaridades de la recta como por ejemplo la inclinación de la recta que puede ser creciente o positiva y aumenta hacia la derecha y la inclinación hacia la izquierda o negativa, estos y otros conceptos a continación:

6.7.1 Pendiente

Es la inclinación como un valor expresado en una razón de cambio es decir la variación de la altura en el eje "y" frente al desplazamiento horizontal en el eje "x". Se expresa como "m", así:

$$m = \frac{variación\ en\ "y"}{variación\ en\ "x"} = \frac{desplazamiento\ vertical}{desplazamiento\ horizontal}$$

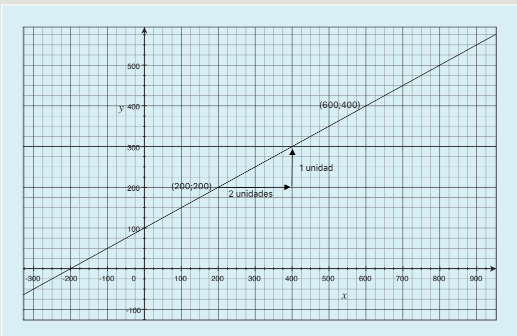
Para generar una recta es suficiente dos puntos, entonces, apliquemos a un ejemplo, en el que los puntos A(200;200) y B(600;400) son puntos que pertenecen a la recta, a partir de esta información, la definición de pendiente es:

Sean $(x_1; y_1)\ y\ (x_2; y_2), puntos\ de\ la\ recta, la\ pendiente\ "m", es:$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{desplazamiento\ vertical}{desplazamiento\ horizontal} = \frac{400 - 200}{600 - 200} = \frac{200}{400} = \frac{1}{2}$$

$$\boldsymbol{m = \frac{1}{2}}$$

A "m" se lo puede definir como la inclinación de la recta deberá crearse un triángulo que de desplaze una unidad verticalmente y dos unidades horizontalmente, entonces la hipotenusa de ese triangulo alinea la inclinación de la recta, fíjese en el gráfico siguiente:



Recuerde:
Si de cualquier punto de la recta se desplaza 2 unidades horizontalmente hacia la derecha porque es positivo y una unidad hacia arriba porque es positivo, encuentro la pendiente y la inclinación de la recta. .

6.7.2 Ordenada en el origen

Es la distancia que existe desde el origen de coordenadas hasta el punto donde la recta corta el eje "y", responde a las coordenadas (0;b), donde "b" es la ordenada en el origen, para el caso del gráfico anterior seria b=100. y por supuesto la coordenada sería (0;100).

Orientar una recta por su pendiente, desarrolla las siguientes características:

Cuando la pendiente es cero:	La recta es horizontal
Cuando la pendiente es indefinida:	La recta es vertical
Cuando la pendiente es positiva:	La recta crece de izquierda a derecha
Cuando la pendiente es negativa:	La recta desciende de izquierda a derecha

6.8 Aplicaciones de la función lineal

La aplicación más importante es en el uso de ecuaciones, su representación en el plano carteciano conocidos los parámetros estudiados anteriormente.

6.8.1 La recta a partir de un punto y la pendiente

Se deben conocer la pendiente "m" y las coordenadas de un punto que pertenece a la recta. El modelo responde al siguiente:

$$(y - y_1) = m(x - x_1)$$

Encuentre la ecuación de la recta si se conoce la siguiente información:

La recta cruza el punto A(-5;10)

La pendiente m = 2

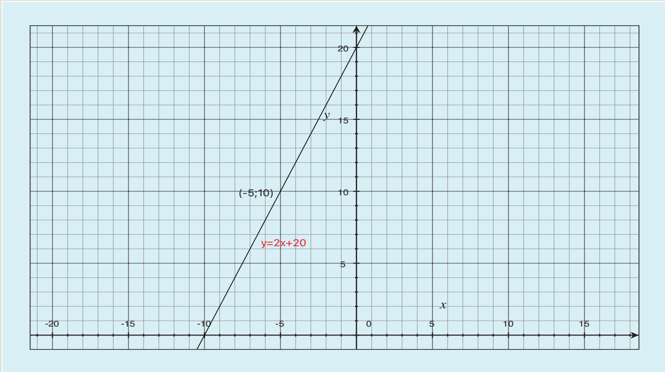
La información corresponde a "punto pendiente"

$$(y - y_1) = m(x - x_1)$$

$$(y - 10) = 2(x + 5)$$

$$y - 10 = 2x + 10$$

$y = 2x + 20,$ Rta.



Revise y resuelva de la página 134 de su Texto básico, el Ejercicio 4.1, los ejercicios del 9 al 12.

6.8.2 La recta a partir de dos puntos

Se debe conocer las coordenadas de dos puntos que pertenecen a la recta, y aplicar el siguiente modelo:

$$(y - y_1) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Encuentre la ecución de la recta si conoce la siguiente información:

La recta cruza los puntos A(-4;-2) y B(-3;8)

La información corresponse a "dos puntos"

$$(y - y_1) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

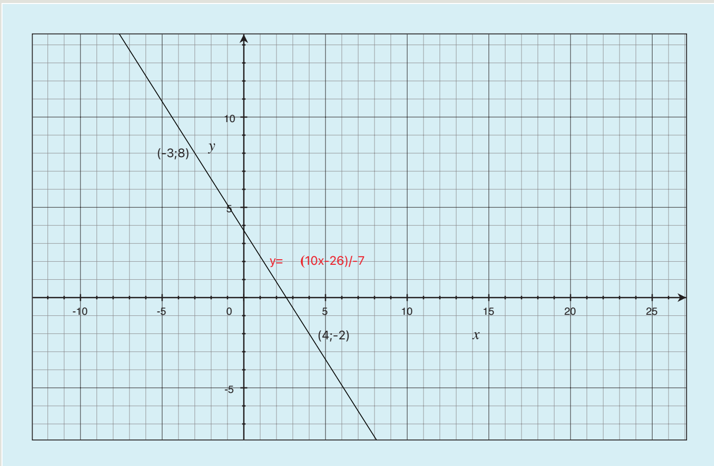
$$(y + 2) = \frac{8 + 2}{-3 - 4}(x - 4)$$

$$y + 2 = \frac{10}{-7}(x - 4)$$

$$-7y - 14 = 10(x - 4)$$

$$-7y - 14 = 10x - 40$$

$y = \frac{10x - 26}{-7}$ Rta.



Revise y resuelva de la página 134 de su Texto básico, el Ejercicio 4.1, los ejercicios del 13 al 16.

6.8.3 La recta por ordenada en el origen

Toda recta en algún momento de su prolongación cruza o intersecta el ejer "y", y a esta altura se le denomina "ordenada en el origen", este valor se lo representa como "b", entonces implícitamente me dan las coordenadas de este punto que sería (0;b), adicionalmente viene la inclinación de la recta que como ya vimos en los modelos anteriores sería la pendiente de la recta. El modelo que a partir del punto pendiente se puede obtener y aplicar con la información mencionada es el siguiente:

$$y = mx + b$$

Encuentre la ecuación de la recta si conoce la siguiente información:

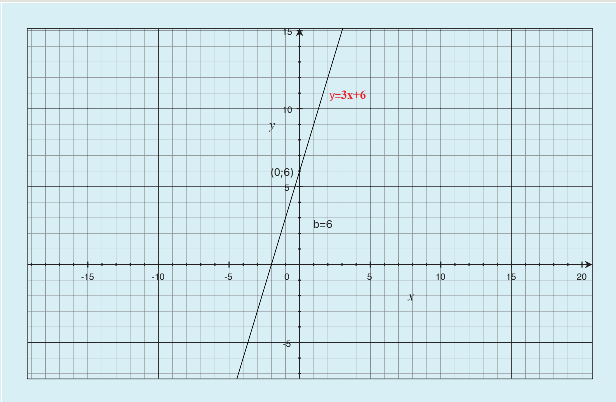
La recta intersecta el eje "y" en 6, es decir en el punto (0;6).
Tiene una pendiente de 3.
La información corresponse a "Ordenada en el origen"

$$y = mx + b$$

Reemplazamos datos:

$$y = 3x + 6$$

$y = 3x + 6$ Rta.



Revise y resuelva de la página 131 de su Texto básico, el Ejemplo 5, e intente graficar la recta.

Ejemplo 59

Encuentre la pendiente y la ordenada en el origen de la siguiente ecuación de la recta. $2x + 3y = 12$

A partir de la ecuación hay que obtener aplicando propiedades algébricas el modelo "ordenada en el origen" que es $y = mx + b$

$$3y = -2x + 12$$

Despeje "y"

$$y = \frac{-2x + 12}{3}$$

Separando en fracciones parciales, así:

$$y = \frac{-2x}{3} + \frac{12}{3}$$

Simplificando lo que se pueda:

$y = \frac{-2}{3}x + 4$, por lo tanto:

$$m = \frac{-2}{3}; \qquad b = 4, \qquad Rta.$$

Recuerde:
Si despeja "y "el coeficiente de "x" es la pendiente y el término independiente es la ordenada en el origen. Siempre se puede tener esta forma de ecuación.

Revise y resuelva de la página 141 de su Texto básico, el Ejercicio 4.2, los ejemplos del 1 al 4, e intente graficar la recta.

Se ha concluido el estudio de esta unidad, siempre le recomiendo revisar lo recomendado hasta que domine el tema en particular y detalles que usted confirma necesita mejorar y así conocer su nivel de conocimientos.

A continuación, le invito a desarrollar la siguiente autoevaluación, cuyo objetivo es conocer cuánto usted ha comprendido del tema, además podrá revisar en la sección del solucionario, la retroalimentación de cada pregunta.

Estoy seguro de que le irá ¡muy bien!

Autoevaluación 6.12

Lea y responda en el espacio entre paréntesis si es verdadera con “V” o falsa con “F”.

1.-	( )	Dada la función $f(x) = 2x + 5$ la ordenada en el origen es “5”.
2.-	( )	Si la pendiente m=4 y la recta pasa por el origen, la ecuación de la recta es: $y = 4x$
3.-	( )	Si una recta se inclina hacia la izquierda y desciende de izquierda a derecha, tiene pendiente positiva.
4.-	( )	Cuando la pendiente es cero, la recta es una vertical.
5.-	( )	La función $h(x) = x + 1, es\ una\ función\ lineal.$
6.-	( )	La función: $f(x) = 8 - x, tiene\ una\ pendiente\ igual\ a - 1$
7.-	( )	Si la recta pasa por los puntos A(0;2) y B(6;2), tiene una pendiente de cero.
8.-	( )	La pendiente de una recta es 2/5, quiere decir que sube 2 unidades y se desplaza 5 unidades horizontalmente.
9.-	( )	La pendiente de una recta es 1, quiere decir que sube 2 unidades verticalmente y se desplaza 2 unidades horizontalmente.
10.-	( )	A partir de m=1 y el punto (0;-6), la ecuación de la recta es: y=6+x.

Verifique sus respuestas en el solucionario al final de la presente guía didáctica.

“Todas las verdades de las matemáticas están vinculadas entre si”

Adrien-Marie Legendre

¡¡Éxitos en la tarea que ha emprendido!!

Ir al solucionario

Resultado de aprendizaje 13

De muestra conocimiento en metodologías y técnicas administrativas y financieras aprovechando recursos eficientemente. .

La semana será dedicada a la resolución de ecuaciones, que son aquellos modelos matemáticos mas cercanos a la realidad especialmente de orden dos o cuadráticas, deberá reconocer identificar y recordad las metodologías por factoreo y por fórmula general que le ayudarán a resolver y conseguir respuestas.

Interpretará con lógica matemática los valores obtenidos en las ecuaciones y su significado real, identificará además aquellas respuestas que no son reales o que se los domina imaginarias y mas que todo el significado real de estos valores.

Finalmente, a partir de éste conocimiento se podrá calcular o resolver una ecuación cuadrática de cualquier manera, y de hoy en adelante se podrá defender, inclusive por ensayo y error e identificará las respuestas hasta gráficamente, con lo que podrá proyectar la evolución de algún problema o avance de un proyecto.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje

Ecuación de segundo grado

Semana 13

Unidad 7 "Ecuaciones cuadráticas"

7 Ecuaciones y función cuadrática

En este tema, aprenderá el comportamiento de las ecuaciones de mayor grado que para esta asignatura veremos solo las de segundo grado y también su comportamiento con las propiedades y metodologías para encontrar un conjunto de valores que satisfagan una función cuadrática, recuerde aquí se utilizará la función cuyo modelo es:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Para continuar con lo aprendido en la semana 12, corresponde aprender la función de segundo grado.

7.1 Función cuadrática

La matemática define a la función de segundo grado como aquella que responde al modelo cuadrático en el que se tiene a, b y c, como constantes y "a" no debe ser cero: Fíjese:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

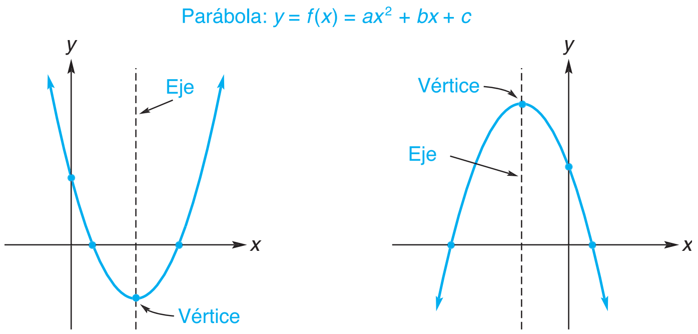
Son funciones cuadráticas las siguientes:

$f(x) = 2x^2 + 3x$
$\mathrm{g(x)}{=}{-}7x^2 - 2x - 8$
$v(x) = 5 + 5x^2$
$h(x) = \dfrac{1}{x^2} + 2x, NO\ ES\ FUNCIÓN\ CUADRÁTICA$

Recuerde:
Una función cuadrática responder a una función polinómica de grado dos.

La gráfica para una función cuadrática como lo vimos en el tema de funciones es una parábola, y esta curva se abra hacia arriba si $a > 0$, y tendría un punto mínimo llamado valle y es el vértice.

Si la parábola tiene un $a < 0$, la curva se abre hacia abajo y tendría un punto máximo llamado el pico de la función y es vértice también. Fíjese en las figuras:



$a > 0$, abre hacia arriba
(a)

$a < 0$, abre hacia abajo
(b)

La línea vertical que divide en dos partes iguales se denomina "**eje vertical**" y es útil porque sobre esta vertical se encuentra el vértice de la parábola que se lo encuentra con la expresión:

$$Vértice\ es\ \left(-\frac{b}{2a}; f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$$

$$En\ \text{"c" se produce la intersección con el eje "y"}$$

Ejemplo 60

Encuentre la gráfica correspondiente a la función:

$f(x) = x^2+7x+12$

La funcióon según el modelo tiene: a=1, b=7 y c=12

Como a es mayor que cero, la parábola se abrirá hacia arriba y tiene un punto mínimo cuyas coordenadas se calculan de la siguiente forma:

Cálculo del Vértice

$-\frac{b}{2a} = -\frac{7}{2*1} = -3{,}5$, este valor es la coordenada en "x" del vértice

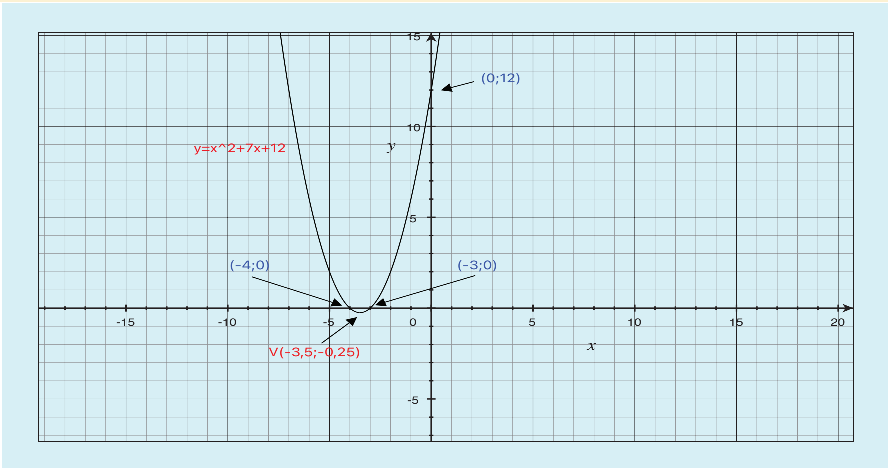
Con este valor de "x", probemos el valor de la función, así:

$f(x) = x^2$+7x+12

$f(-3{,}5) = -3{,}5^2$+7(-3,5)+12=12,25-24,5+12= - 0,25, que es la coordenada en "y" del vértice, así:

$$\boldsymbol{Vertice(-3,5;-0,25)}$$

Esquematizemos la parábola:



Recuerde:
Siempre se pueden evaluar mas valores de "x" en la función cuadrática y obtener puntos que dibujan y corresponden a la parábola.

Revise y resuelva de la página 149 de su Texto básico, el Ejercicio 4.3, los ejemplos del 13 al 21.

7.2 Aplicaciones de la función cuadrática

Con la función cuadrática se pueden operar un sinnúmero de aplicaciones, son ejemplos muy comunes la productividad de una empresa, a partir de una función de demanda o de oferta se relacionan esas funciones con la productividad y se obtiene un modelo cuadrático que es de fácil aplicación en la mayoría de negocios.

el siguiente ejemplo le ayudará a ser un emprendedor:

Una empresa que fabrica bicicletas tiene una función de demanda y es:

$$p = 1000 - 2q$$

Donde "p" es el precio de cada bicicleta en dolares, y;

"q", es la cantidad de bicicletas que se venden por semana.

Se encontrará la producción máxima y el ingreso para ese caso máximo.

La función de ingreso será: $i = f(q)$. Es conocido que el ingreso total es:

$$ingreso = presio * cantidad$$

$$i = pq$$

Si remplazamos el valor de "p", para que todo se presente en función de "q", tendrá:

$$i = pq$$

$$i = (1000 - 2q)q$$

$$i = 1000q - 2q^2$$

Se ha conseguido una función cuadrática, en la cual a=-2, b=1000, y c= 0.

Aprendió que esta parábola se abre hacia abajo, es decir que mostrará un punto pico o alto que para el ejemplo será entonces el valor máximo,

Para lo cual calculamos las coordenadas del vértice como ya se ha hecho: así:

Calulo del Vértice

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{1000}{2 * -2} = 250$$

Encontramos el valor de "-250" en la función "i", para encontrar la otra coordenada:

$$i(q) = 1000q - 2q^2$$

$i(-250) = 1000(250) - 2(250)^2$=125.000

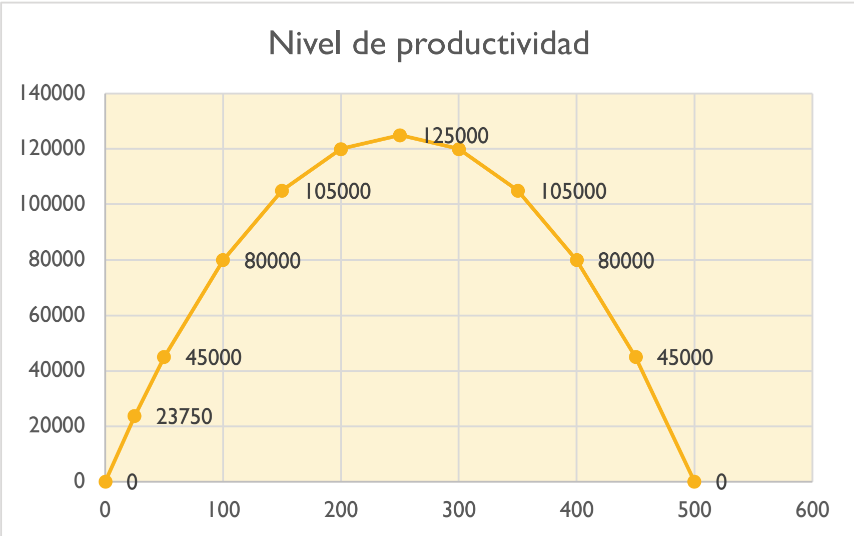
El vértice o punto máximo se ubica en:

(250 ; 125000)

Interpretando la respuesta del vertice, deberá comprender que el máximo nivel de producción ocurre cuando el ingreso es de $125.000.oo, y cuando se han vendido 250 bicicletas en la semana.

La gráfica es mas expresiva, si le damos valores a “q”, fíjese:

q	0	25	50	100	150	200	250	300	350	400	450	500
i	0	23750	45000	80000	105000	120000	125000	120000	105000	80000	45000	0



El valor más alto es de $125.000, cuando se venden 250 unidades.

Revise y resuelva de la página 150 de su Texto básico, el Ejercicio 4.3, los ejemplos del 15 al 20 y del 23 al 26.

Se ha concluido el estudio de esta unidad, siempre le recomiendo revisar lo recomendado hasta que domine el tema en particular y detalles que usted confirma necesita mejorar y así conocer su nivel de conocimientos.

A continuación, le invito a desarrollar la siguiente autoevaluación, cuyo objetivo es conocer cuánto usted ha comprendido del tema, además podrá revisar en la sección del solucionario, la retroalimentación de cada pregunta.

Estoy seguro de que le irá ¡muy bien!

Autoevaluación 7.13

Lea y responda en el espacio entre paréntesis si es verdadera con "V" o falsa con "F".

1.-	( )	Dada la función $f(x) = x^2 + x - 5$ la gráfica se abre hacia arriba y corta el eje "y" en la coordenada (0; - 5).
2.-	( )	La gráfica de la siguiente función: $f(x) = (x-2)(x-4)$ intersecta el eje "x" en $(0;2)\ y\ en\ (0;4)$.
3.-	( )	Si existe un punto mínimo en las coordenadas $(0;0)$, la función es: $f(x) = x^2$
4.-	( )	La coordenada "x" del vértice de una parábola se calcula con: $-\frac{b}{2a}$.
5.-	( )	Dada la función $f(x) = x^2 - 2x$, la coordenada en "x" del vértice es: "1"

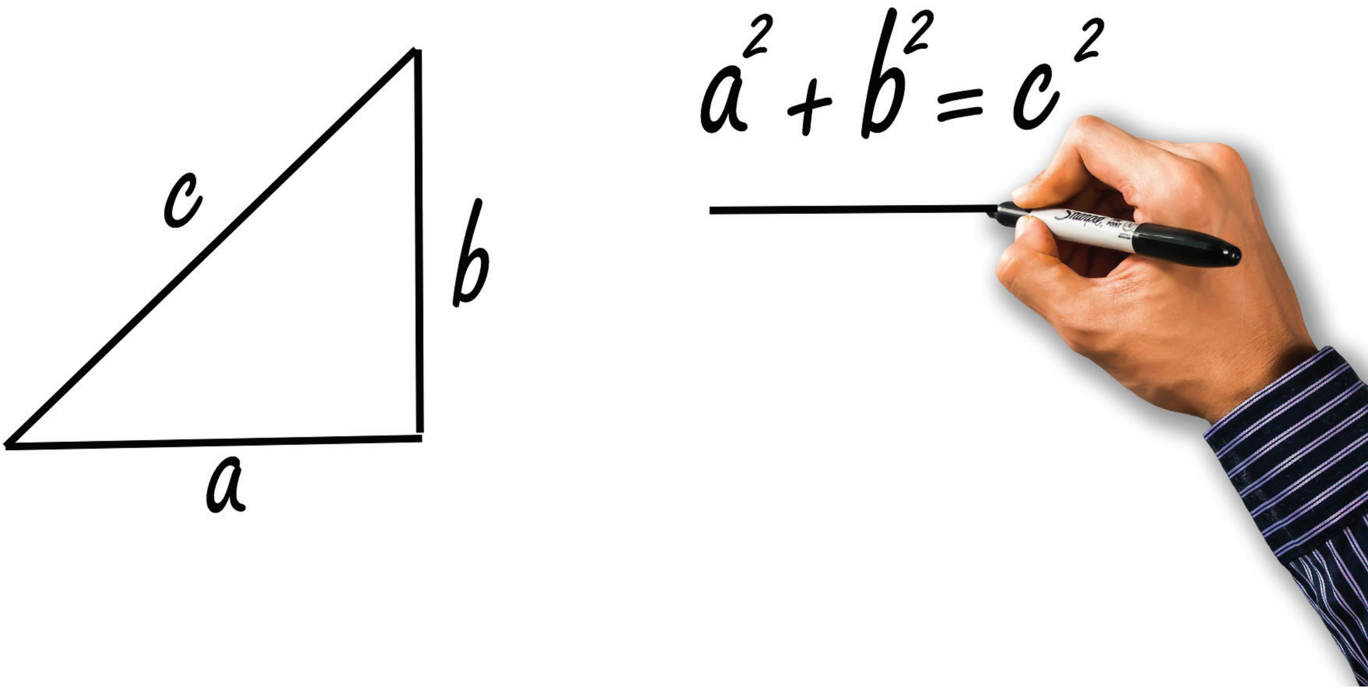
Verifique sus respuestas en el solucionario al final de la presente guía didáctica.

"Los matemáticos han alcanzado lo más alto del pensamiento humano"

Havelock Ellis

¡¡Éxitos en la tarea que ha emprendido!!

Ir al solucionario



Resultado de aprendizaje 14	Utiliza la abstracción como una habilidad adquirida para sintetizar y analizar situaciones propuestas que pueden ser modeladas matemáticamente. .

La siguiente semana aprenderá a reconocer una función exponencial y la aplicación de modelos reales que las utilizará en matemática financiera por ejemplo y en otros modelos de la vida real.

Podrá detectar como vertiginosamente un modelo matemático exponencial expresa subida de valores o de resultados de manera violenta, empleará el método de ensayo y error, graficará y analizará la gráfica, reconocerá la figura que dibuja la función exponencial y detectará puntos notables y de intersección para partir de valores mínimos.

Es importante que en esta semana llegue a reconocer las diferencias y las propiedades que poseen cada función hasta el momento estudiadas.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje

Semana 14

7.3 Función exponencial

Una función exponencial se caracteriza por tener a la variable independiente en el lugar del exponente, es decir que puede conformar una ecuación exponencial porque la incógnita es un exponente.

Una metodología amigable para detectar que gráfica arroja una función exponencial es el de ensayo y error, esto significa que asigne valores a la variable "x" que arroje salidas de "y" constituyenco un par ordena o coordenada cuyos puntos deberán ser representados.

Las funciones exponenciales tienen desenlaces vertiginosos, pueden tener incrementos muy rápidos en poco dezplazamiento y a si mismo decrementos significativos. La función exponencial responde al siguiente modelo:

$$f(x) = a^x, \text{ donde: } a > 0 \; y \; a \neq 1$$

Las reglas de los exponentes son recursos muy útiles para resolver una función exponencial, le recuerdo que esas propiedades son:

Reglas de los exponentes

1. $a^m a^n = a^{m+n}$.	**2.** $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.
3. $(a^m)^n = a^{mn}$.	**4.** $(ab)^n = a^n b^n$.
5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$.	**6.** $a^1 = a$.
7. $a^0 = 1$.	**8.** $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.

Figura . Regla de los exponentes:

Nota Fuente. Haeussler, E. ; Richard, P. y Richard, W., (2015). Matemáticas para Administración y Economía.

Las propiedades de la función exponencial son:

1.- El dominio de la función exponencial son todos los números reales.

2.- El rango o recorrido son todos los números positivos.

3.- La gráfica exponencial tiene una intersección en el eje "y" en la coordenada (0;1)

4.- La gráfica exponencial no tiene intersección en el eje "x".

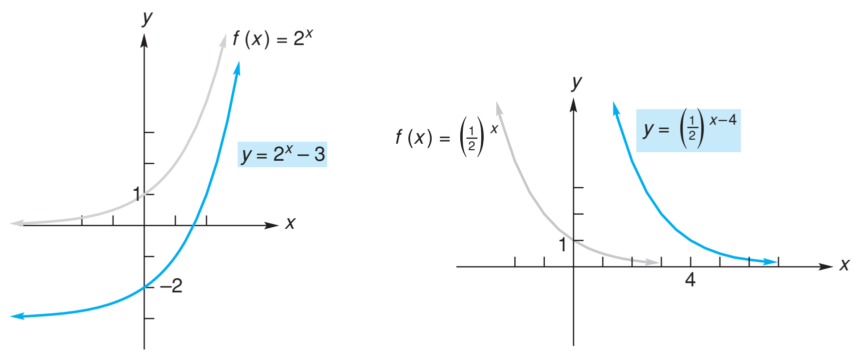
6.- Si la función es: $f(x) = a^x$, y $a > 1$, la gráfica asciende de izquierda a derecha.

7.- Si la función es: $f(x) = a^x$, y $0 < a < 1$, la gráfica desciende de izquierda a derecha.

6.- Si la función es: $f(x) = a^x$, y $a > 1$, la gráfica se aproxima al eje "x" conforme x, toma valores negativos cada vez mayores en valor absoluto.

6.- Si la función es: $f(x) = a^x$, y $00 < a < 1$, la gráfica se aproxima al eje "x" conforme x toma valores positivos cada vez mayores o grandes.

Las siguientes son modelos de gráficas de funciones exponenciales:



Para el siguiente ejemplo, $f(x) = 4^x$, grafique la función y determine sus propiedades:

Como obserba, la vriable independiente ocupa el lugar del exponente, eso le da la característica de función exponencial. A partir de otorgaar valores a "x" y obtener valores de la función, determinamos la siguiente tabla:

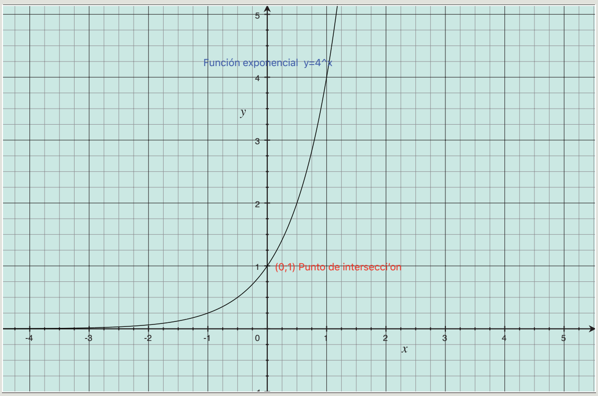
x	-4	-2	-1	0	1	2	3
$f(x) = 4^x$	0,004	0,06	0,25	1	4	16	64

El dominio de la función son todos los reales, es decir cualquier valor puede tomar "x".

El rango o recorrido son los números positivos, es decir que "y" siempre será positivo.

Punto de intersección cuando x=o, cuyo resultado es “1”, es decir coordenada (0;1)

Los valores negtivos asignados no logran alcanzar el eje “x”, a esto se lo llama asintótico.
Es decir los valores de salida “y” son positivos y mayores que cero.



Recuerde:
Siempre se pueden evaluar mas valores de “x” en la función, pero al ser exponencial sería imposible representarla.

Revise y resuelva de la página 192 de su Texto básico, el Ejercicio 5.1, los ejemplos del 1 al 12.

7.4 Aplicaciones de la función exponencial

Una aplicación muy común es la capitalización de inversiones mediante tasas de intrés compuesta o que responden al modelo:

$$M = C(1+i)^n$$

Donde:

M = Monto o capital mas intereses, ganados o pagados em um período de tempo a uma tasa de interés compuesta.

C = Capital o inversión o pago inicial.

n = Número de períodos o plazo al cual se coloca el capital.

i = Tasa de interés em general em %, que debe ser convertida a tanto por uno.

Ejemplo 61

Encuentre el Monto o valor final de una inversión iniclal de $1000.oo, colocada a difetenres plazos hasta 10 años a una tasa de interés del 5% anual. El modelo es similar a:

$$f(x) = a^x$$

Para nuestro caso sería entonces:

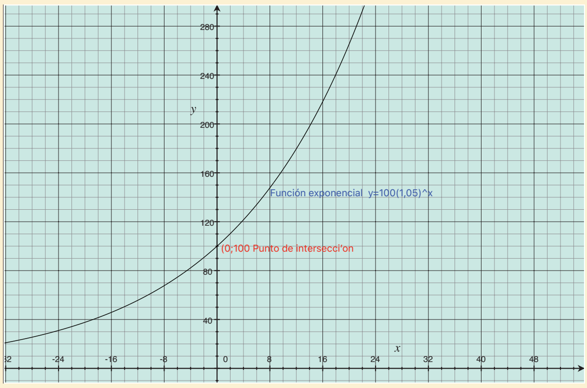
$$M = C(1+i)^t$$

$$M = 1000(1+0.05)^t$$

$$M = 1000(1{,}05)^t$$

La tabla tiene valores calculados para ver el comportamento de la función como exponencial

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
M(t)	100,00	105,00	110,25	115,76	121,55	127,63	134,01	140,71	147,75	155,13	162,89



Para el valor equivalente en el año 10, el monto es de $162,89

Revise y resuelva de la página 188 de su Texto básico, el Ejemplo 6 y de la página 193 el numeral 29 (Inversión).

7.5 Ecuaciones exponenciales básicas

Una ecuación exponencial, tiene la incógnita ubicada en el exponente y por principio el signo de la igualdad hacia un término o el cero. Son ejemplos los siguientes:

$$2^x = 64$$

$$12^{(x+1)} = 3$$

$$5^{(1-x)} = 2^{x^2+x}$$

$$(a-1)^{x+2}(a-2)^x = a^x$$

La solución de una ecuación exponencial se logra despejando la incógnita "x", para lo cual debemos bajar de la posición de exponente a la ubicación de un coeficiente y la única manera de lograrlo es utilizando la teoría de los logaritmos. A continuación, tienes las propiedades de los logaritmos útiles para solucionar ecuaciones exponenciales.

Propiedades de los logaritmos	
$\log ab$	$\log a + \log b$
$\log \frac{a}{b}$	$\log a - \log b$
$\log a^x$	$x\log a$
$\log 1$	cero
$\log 0$	No esta definido

Existen dos tipos de logaritmos y son aquellos en base "10" y en base "e" :

Base "10" logaritmo vulgar:

$$\log_{10} a = \log a$$

Base "e" y (e=2,7182818281828), se escribe como:

$$\log_e a = \ln a$$

Ejemplo 62

Resuelva lal siguiene euaión. $6^{3x-4} = 36^{x+2}$

Puede apreciar que los exponentes llevan implícita una ecuación. trabaje en las bases para simplificar el ejercicio, de la siguiente manera:

$$6^{3x-4} = 6^{2(x+2)}$$

El probocar tener las mismas bases ayuda que conformemos una ecuación solo con los exponentes y procedemos resolver como si fuera una ecuación de primer grado.

Si las bases son iguales, los emponentes también deben ser iguales, asi:

$$3x - 4 = 2(x + 2)$$
$$3x - 4 = 2x + 4$$
$$3x - 2x = 4 + 4$$
$$x = 8, \quad \text{Rta.}$$

Ejemplo 63

Resuelva lal siguiene euaión. $3 * 4^{x-1} = 7$

Puede apreciar que los exponentes llevan implícita una ecuación.

$$4^{x-1} = \frac{7}{3}$$

Deje el miembro que tiene la incógnita a la izquirda para poder tomar logaaritmos.

$$\log 4^{x-1} = \log \frac{7}{3}$$

Utilice la propiedad de los logaritmos, por la cual el exponente pasa ha ser coeficiente, y el logaritmo de una división de la siguiente manera:

$$(x - 1) \log 4 = \log 7 - \log 3$$

Quèdese con el factor que contiene la incógnita, asi:

$$(x - 1) = \frac{\log 7 - \log 3}{\log 4}$$

$$x = \frac{\log 7 - \log 3}{\log 4} + 1$$

$$x = \frac{0{,}845098 - 0{,}477121}{0{,}602059} + 1$$

$$x = 0{,}611197 + 1$$

$$\boldsymbol{x = 1{,}8111} \quad \textbf{Rta.}$$

Recuerde:
No siempre en las ecuaciones exponenciales se obtienen valores enteros.

Revise y resuelva de la página 212 de su Texto básico, el Ejemplo 4, que trata de la Ecuación de demanda.

7.6 La función logarítmica

Una función logarítmica tiene como protagonismo al logaritmo, entonces debemos comprender primero su definición que es o que son los logaritmos, le expongo la siguiente:

"Es el exponente al que hay que elevar una base para obtener el número"

$$y = \log_b x,$$
$$b^y = x,$$

Para dominar este acertijo practique la conversión de una ecuación exponencial a una logarítmica y viceversa. Fíjese en los siguientes ejemplos:

Convertir si es exponencial a logarítmica o logarítmica a exponencial.

$\log_2 16 = 4$	$2^4 = 16$
$2^5 = 32$	$\log_2 32 = 5$
$100^0 = 1$	$\log_{100} 1 = 0$
$\log_{(a+1)} x = 5$	$(a+1)^5 = x$

La siguiente es la gráfica típica de la función logarítmica.

x	y
$\frac{1}{4}$	-2
$\frac{1}{2}$	-1
1	0
2	1
4	2
8	3

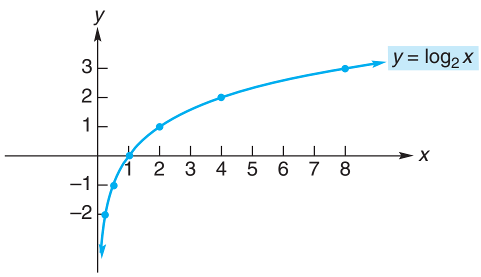


Figura . Función logarítmica:

Nota Fuente. Haeussler, E. ; Richard, P. y Richard, W., (2015). Matemáticas para Administración y Economía.

Como se puede observar las siguientes características:

El dominio son todos los números positivos

Los valores de "x" entre cero y uno, arrojan logaritmos negativos.

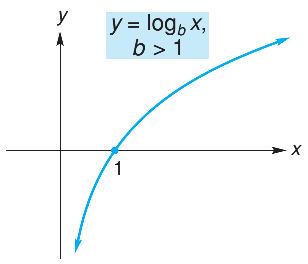
Cuando el valor de "x" es "1", el logaritmo es cero.

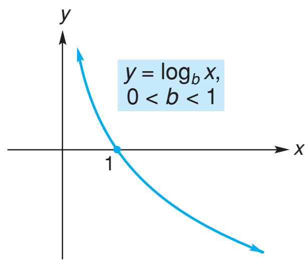
El recorrido o rango son todos los números reales.

Los valores negativos del logaritmo entre cero y uno, van hacia el infinito y es asintótico.

La grafica crece de izquierda a derecha.

Las modalidades de una función logarítmica son las que se expresan:





7.7 Propiedades de la función logaritmo

El dominio es el intervalo $(0; \infty)$

No existe logaritmo de números enteros negativos y tampoco del cero

El recorrido o rango se cumple en el intervalo $(-\infty: \infty)$

Cero es el valor del logaritmo de "1".

La coordenada de la intersección ocurre en: $(1; 0)$.

7.8 Aplicación de la función logaritmo

Existen muchas aplicaciones de la función logarítmica, especialmente en crecimientos y decaimientos de bacterias o virus, se aplica mucho en ingeniería ambiental y en biotecnología.

Para la aplicación nuestra tomaremos un ejemplo de aplicación de la cantidad de radiación que va quedando en un organismo radiado solarmente.

Estudiemos la degeneración radioactiva a la que está expuesta una persona:

Se conoce que la ecuación siguiente determina la cantidad de radiación en el tiempo, así:

$$C = C_0 e^{-\lambda t}$$

Donde C es la cantidad perdida de radiación en un tiempo "t"

C_0 es la cantidad inicial de radiación entregada.

λ es la constante de degeneración obtenido en laboratorio y de la literatura científica.

t, es el tiempo, que es la variable independiente.

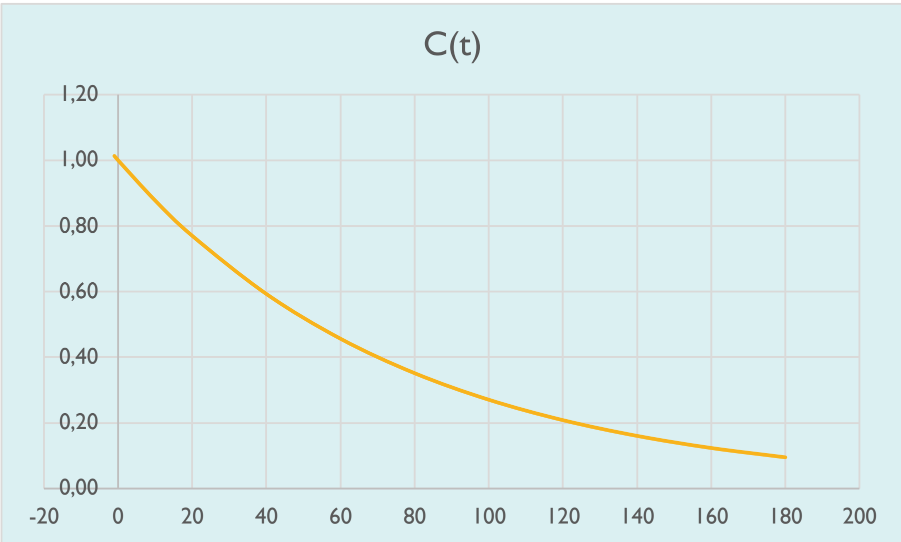
El ejemplo dirá que se tiene 5 miligramos de Po (polonio), con una constante de decaimiento $\lambda = -0{,}00501\ mg/dia$, grafique la gráfica y sus características:

$$\boldsymbol{C = 5e^{-0{,}00501t}}$$

La mejor manera es por ensayo y error, conformemos una tabla de valores, asï:

t	-1	0	10	20	40	60	80	100	120	140	160	180
C(t)	1,01	1,00	0,88	0,77	0,59	0,46	0,35	0,27	0,21	0,16	0,12	0,10

Representando la función se tiene:



La curva señala como se va decayendo en días, los 5 mg de Polonio.

Revise y resuelva de la página 201 de su Texto básico, el Ejercicio 5,2 los ejercicios del 29 al 46.

Se ha concluido el estudio de esta unidad, siempre le recomiendo revisar lo recomendado hasta que domine el tema en particular y detalles que usted confirma necesita mejorar y así conocer su nivel de conocimientos.

A continuación, le invito a desarrollar la siguiente autoevaluación, cuyo objetivo es conocer cuánto usted ha comprendido del tema, además podrá revisar en la sección del solucionario, la retroalimentación de cada pregunta.

Estoy seguro de que le irá ¡muy bien!

Autoevaluación 7.14

Lea y responda en el espacio entre paréntesis si es verdadera con "V" o falsa con "F".

1.-	( )	La expresión $\log 2x = \log 2 + \log x$
2.-	( )	Al resolver la ecuación: $a^{x+2} = a^8$,, x es igual a 6
3.-	( )	Si la función $f(x) = x^2$, tiene como vértice el punto (0;0)
4.-	( )	Al resolver la ecuación: $(a * b)^{x-2} = 1$, x es igual a 2
5.-	( )	Dada la función $f(x) = x^2 - 2x$, la coordenada en "x" del vértice es: "1"
6.-	( )	La función logaritmo, siempre corta al eje "x" en la coordenada (1;0)
7.-	( )	La expresión: $\log_a(2 - x) = 3$, es equivalente a: $a^3 = (2 - x)$
8.-	( )	La expresión: $a^x = 2$, es equivalente a: $\log_a 2 = x$
9.-	( )	El logaritmo de una potencia es el exponente por el logaritmo de la base.
10.-	( )	La ecuación: $\log 2 + \log x = 1$,tiene por respuesta a x=5

Verifique sus respuestas en el solucionario al final de la presente guía didáctica.

"Las matemáticas puras son, en su forma, la poesía de las ideas lógicas"

Albert Einstein

¡¡Éxitos en la tarea que ha emprendido!!

Ir al solucionario

Resultado de aprendizaje 15

Demuestra conocimiento en metodologías y técnicas administrativas y financieras aprovechando recursos eficientemente. .

La siguiente semana es dedicada a las finanzas, la administración y la economía, se logrará reconocer los conceptos establecidos para este tema como el valor actual, el valor futuro, las tasas de interés los tipos y la forma de pago y en especial los tiempos o plazos.

El tema le ayudará para aplicar a inversiones o a préstamos que una entidad financiera le proporciona y aprenderá como funciona las finanzas y como la matemática le brinda la ayuda y el conocimiento para que pueda proyectar o financiar un delante de dinero o un préstamo o una hoja de amortización.

Dominará a convertir las unidades temporales, los períodos de capitalización y los sabrá aplicar de manera inmediata en su diario vivir.

Al final el tema se presta para diseñar situaciones compuestas que requerirán un poco mas de conocimiento a partir de las bses que lleva en este capítulo en especial.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje

Matemática financiera

Semana 15

Unidad 8 "Matemáticas financieras"

8 Matemática Financiera

8.1 Matemática para finanzas

Es interesante saber que ciertos artículos, bienes inmuebles o bienes muebles se pueden adquirir y que siempre es posible pagar los valores que correspondan por estos aspectos. Para eso surge el financiamiento monetario, e involucra a la matemática para amortizar una deuda o ganar un interés. La comprensión de las matemáticas financieras puede favorecer al cliente o al consumidor tomas decisiones con conveniencia en cuanto a gastos o inversiones bancarias.

Como todo servicio tiene un costo, de igual manera el dinero que es el recurso en transacción vale lo que una tasa de interés lo designe. A continuación, las definiciones:

8.2 Interés compuesto

Es enfrentar el tema del valor del dinero en el tiempo cuando se generan inversiones, préstamos etc. La tasa de interés que capitaliza inmediatamente cumplido el período que conforma un nuevo capital, que entra a ganar interés con un capital inicial mayor.

Para un capital inicial y en la espera de recibir un incremento conforme a la tasa de interés que generará una ganancia o interés mas el monto o capital final, lo expresa la siguiente fórmula:

$$VF = VP(1+i)^n$$

Donde:

VF= Valor final o monto.

VP= Valor presente o capital inicial.

i= Tasa de interés compuesto

n= Número de períodos o prazo

La tasa de interés generalmente se expressa anualmente al igual que la capitalización, pero si no es el caso se puede ayudar con la siguiente expresión que permite cambiar la tasa a mensual, diaria etc etc, de la siguiente manera.

$$\left(1+\frac{i}{n}\right)^{n}=\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}..$$

Esta ecuación le permite encontrar tasas equivalentes en diferentes plazos de capitalización, un ejemplo es el siguiente:

Ejemplo 64

Encuentre la tasa equivalente con capitalización trimestral a una opoeración financiera que ejecuta una capitalización anual del 12%. Partiendo de la ecuaciòn:

$$\left(1+\frac{i}{n}\right)^{n}=\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}$$

Encontremos el valor de “j” y convierta la tasa en por ciento a tanto por uno. Entonces los datos son:

$i = 12\% = 0{,}12$

$n = 1\,período = 1\,año$

$m = 4\,períodos = trimestres\ en\ el\ año.$

$j = incógnita$

$$\left(1+\frac{0{,}12}{1}\right)^{1}=\left(1+\frac{j}{4}\right)^{4}$$

$$(1+0{,}12)^{1}=\left(1+\frac{j}{4}\right)^{4}$$

Extrayendo la raiz cuarta en ambos lados de la ecuaciòn:

$$\sqrt[4]{1{,}12}=\left(1+\frac{j}{4}\right)$$

$$0{,}028=\frac{j}{4}$$

$$j = 0{,}1149$$

$$\mathbf{j = 11,49\%} \quad \textbf{Rta}.$$

Es decir el 11,49% capitalizado trimestralmente es equivalente al 12 % capitalizado anualmente.

Ejemplo 65

Encuentre el monto de $1600.oo depositada al 8% anual, a 10 años.

$$VF = VP(1+i)^n$$

Datos:

$i = 8\% = 0{,}08$

$n = 10\ año$

$VP = \$1600,oo$

$VF = incógnita.$

$$VF = VP(1+i)^n$$

$$VF = 1600(1+0{,}08)^{10}$$

$$VF = 1600(1{,}08)^{10}$$

$$VF = 1600(2{,}158924)$$

$$\boldsymbol{VF = \$3.454,28,} \quad \boldsymbol{Rta.}$$

Es decir al final del décimo año, la inversión de $1600,oo depositados al 8% anual, se convierte en $3.454,28 dólares.

Ejemplo 66

Encuentre el plazo al que hay que dejar un capital de $10.000.oo depositado al 5%, capitalizado semestralmente, para obtener $30.000,oo.

$$VF = VP(1+i)^n$$

La ecuación del interés compuesto es perfectamente aplicable solo tome en cuenta que la respuesta saldrá en semestres.

Datos:

$i = 5\% = 0{,}05$

$n = incógnita$

$VP = \$10.000,oo$

$VF = \$30.000,oo.$

$$VF = VP(1+i)^n$$

$$30.000 = 10.000(1+0{,}05)^n$$

$$3 = (1{,}05)^n$$

$$\log 3 = n \log 1{,}05$$

$$n = \frac{\log 3}{\log 1{,}05}.$$

$$n = \frac{0{,}47712}{0{,}02118} = 22{,}52\ semestres$$

$$\boldsymbol{n = 11,26\ años} \quad \boldsymbol{Rta}$$

Es decir al final de 11,26 años, la inversión de $10.000,oo depositados al 5% capitalizado semestralmente, se convierte en $30.000,00 dólares.

8.3 Valor presente

Calcular un valor presente es actualizar una deuda o una inversión, podemos utilizar la misma ecuación del interés compuesto y simplemente despejar "VP".

El siguiente ejemplo es una aplicación práctica:

Ejemplo 67

Encuentre el valor presente que se debe depositar hoy, para obtener al final de 5 años $20.000,oo, a una tasa del 12% capitalizable anualmente.

$$VF = VP(1+i)^n$$

La ecuación del interés compuesto es perfectamente aplicable

Datos:	$VF = VP(1+i)^n$
$i = 12\% = 0{,}12$	$20.000 = VP(1+0{,}12)^5$
$n = 5\ años$	$VP = \dfrac{20.000}{1{,}12^5}$
$VP = x$	$VP = \dfrac{20.000}{1{,}7623}$
$VF = 2x.$	$VP = 11.348{,}80$
	$\boldsymbol{VP = \$11.348,80 \quad Rta}$

Es decir si invierto $11.348,80, depositados al 12% capitalizado anualmente, se convertirá en $20.000,00 dólares en 5 años.

Recuerde

Las unidades temporales de la tasa deben ser las mismas de los períodos.

Revise y resuelva de la página 369 de su Texto básico, el Ejemplo 2, y los ejercicios del 13 al 17 de la página 372.

Revise y resuelva de la página 377 de su Texto básico, el Ejercicio 8,2, los ejercicios del 11 al 18.

8.4 Anualidades

El término "anualidad" se consibe como una Renta que recibe o se paga anualmente, pero podría ser semestralmente y sería una semestralidad o cada mes y sería una mensualidad. Las anualidades no son siempre cada año por lo que debería llamarse simplemente Renta.

La matemática financiera tiene fórmulas ya demostradas para calcular una renta con diferente nivel de capitalización, se requiere de una tasa de interés y del número de períodos, así como un valor futuro o en su defecto la renta.

Una aplicación directa de esta teoría es las populares tablas de amortización, que son rentas a pagar por un largo período de tiempo, contratdas o acordades con anticipación.

8.4.1 Anualidades vencidas

Aquellas que se ejecutan a período vencido es decir que hay que espear el final del período para que se se paguen o reciban. Se concideran capitalizables. y sus ecuaciones son:

Anualidades vencidas	
Valor futuro	$VF = \frac{R[(1+i)^n - 1]}{i}$
Valor presente	$VA = \frac{R[1-(1+i)^{-n}]}{i}$
Renta	$R = \frac{VF * i}{(1+i)^n - 1}$
	$R = \frac{VA * i}{1-(1+i)^{-n}}$
Períodos	$n = \frac{\log\left[\left(\frac{VF}{R}+1\right) * i\right]}{\log(1+i)} - 1$
	$n = -\frac{\log\left[1-\left(\frac{VA}{R}-1\right) * I\right]}{\log(1+i)} - 1$

8.4.2 Anualidades anticipadas

Aquellas que se ejecutan a período anticipado es decir que se paga o recibe, el mismo instante en que se inicia el período. Se concideran actualizables. y sus ecuaciones son:

Anualidades anticipadas	
Valor futuro	$VF = R\left[\frac{(1+i)^{n+1}}{i} - 1\right]$
Valor presente	$VA = R\left[\frac{1-(1+i)^{-(n-1)}}{i} + 1\right]$
Renta	$R = \frac{VF}{\frac{(1+i)^{n+1}-1}{i} - 1}$
	$R = \frac{VA}{\frac{1-(1+i)^{-(n-1)}}{i} + 1}$
Períodos	$n = \frac{\log\left[\left(\frac{VF}{R}+1\right) * i\right]}{\log(1+i)} - 1$
	$n = -\frac{\log\left[1-\left(\frac{VA}{R}-1\right) * I\right]}{\log(1+i)} - 1$

Para el cáluco de la tasa de una renta, que no son muy cambiantes pues generalmente las fija la autoridad financiera de un país, se puede recurrir al excell en el comando TASA.

Ejemplo 68

Encuentre el valor presente de una renta de $100,oo cada fin de mes durante 3 años a un interés del 6% compuesto mensual.

$$VA = \frac{R[1-(1+i)^{-n}]}{i}$$

La ecuación aplicable es para el valor presente a partir de una renta vencida, además hay que convertir los 3 años a meses para que las unidades temporales sean las mismas (meses).

Datos:

$$VA = \frac{R[1-(1+i)^{-n}]}{i}$$

$i = 6\% = 0{,}06\ mensual$

$$VA = \frac{100[1-(1+0{,}06)^{-36}]}{0{,}06}$$

$n = 3\ años = 36\ meses$

$$VA = \frac{100[1-0{,}12274]}{0{,}06}$$

$VP = incógnita$

$$VA = \frac{100[0{,}88]}{0{,}06}$$

$R = \$100,oo.$

$$VA = 1.462{,}10$$

$$\boldsymbol{VA = \$1.462,10 \quad Rta}$$

Es decir que liquidar hoy el valor de \$1.462,10, al 6% capitalizado mensualmente, equivale a acumular \$100.oo cada fin de mes durante 3 años.

Ejemplo 69

Encuentre el valor de la Renta anual que hay que cancelar por una deuda de \$10.000,oo contratada al 6% compuesto anual, duarnte 4 años..

$$R = \frac{VF * i}{(1+i)^n - 1} =$$

La ecuación aplicable es para la Renta vencida a pagar por un valor futuro, además no hay que convertir nada pues los 4 años y la tasa de interés del 6% es compueta anaulmente, es decir las unidades temporales son las mismas (años).

Datos:

$$R = \frac{VF * i}{(1+i)^n - 1} =$$

$i = 6\% = 0{,}06\ anual$

$$R = \frac{10.000 * 0{,}06}{(1+0{,}06)^4 - 1}$$

$n = 4\ años$

$$\mathrm{R} = \frac{600}{1{,}26 - 1}$$

$VP = \$10.000,oo$

$$\mathrm{R} = \frac{600}{0{,}26}$$

$R = incógnita.$

$$R = 2.307{,}70$$

$$\boldsymbol{R = \$2.307,70 \quad Rta}$$

Es decir que pagar \$2.307,70 al final de cada año a una tasa compuesta anual del 6%, terminará liquidando \$10.000.oo durante 4 años.

Revise y resuelva de la página 386 de su Texto básico, el Ejercicio 8,3, los numerales 13, 16, 17, 18, 20 y 22.

8.5 Amortización de préstamos

Los fondos de amortización son pagos periódicos que se ejecutan para finalizar una obligación financiera futura.

Un ejemplo práctico es si usted compra un automòvil que cuesta $17.000,oo que será reemplazao después de 15 años, año en el que tendrá un valor de $8.000,oo, Para poder dismoner de dinero para este acontecimiento y poder comprar otro nuevo automóvil, se establece un fondo de amortización. La cantidad en este fondo es la diferencia entre el valor original y el valor de sesecho o actual, entonces si se depocitan pagos iguales al final de cada trimestre al 8% compuesto trimestralmente, cual debería ser la renta.

Estos serían los datos para la ecuación de Renta en función del valor futuro con pagos vencidos, lo explica el ejemplo 70:

Ejemplo 70

Encuentre el valor de la Renta trimestral para un fondo de amortización que reponga un automovil cuyo valor inicial fue de $17.000,oo y despues de 15 años cuesta $8.000.oo. Si se pagan trimestralmente cuotas al 8% compuesto trimestralmente.

$$R = \frac{VF * i}{(1+i)^n - 1} =$$

La ecuación aplicable es para la Renta vencida a pagar por un valor futuro, además hay que convertir los 15 años a trimestres y la tasa de interés tambien del 8% que es compueta anaulmente, es decir las unidades temporales deben ser las mismas (trimestres).

Datos:

$$i = 8\% = \frac{0{,}08}{4} = 0{,}02\ trimestral$$

$$R = \frac{VF * i}{(1+i)^n - 1} =$$

$$R = \frac{9.000 * 0{,}02}{(1+0{,}02)^{60} - 1}$$

$$n = 15\ años = 15(4)$$
$$= 60\ trmestres$$
$$VP = \$17.000 - 8.000 = \$9.000$$
$$R = incógnita.$$

$$\mathrm{R} = \frac{180}{3{,}28 - 1}$$
$$\mathrm{R} = \frac{180}{2{,}28}$$
$$R = 78{,}95$$
$$\boldsymbol{R = \$78,95 \quad Rta}$$

Es decir que pagar 60 cuotas de $78,95 al final de cada trimestre a una tasa compuesta anual del 8%, terminará liquidando $9.000.oo que sería el costo actual del automóvil..

Revise y resuelva de la página 387 de su Texto básico, el Ejercicio 8,3, los numerales 31 y 33.

Se ha concluido el estudio de esta unidad, siempre le recomiendo revisar lo recomendado hasta que domine el tema en particular y detalles que usted confirma necesita mejorar y así conocer su nivel de conocimientos.

A continuación, le invito a desarrollar la siguiente autoevaluación, cuyo objetivo es conocer cuánto usted ha comprendido del tema, además podrá revisar en la sección del solucionario, la retroalimentación de cada pregunta.

Estoy seguro de que le irá ¡muy bien!

Autoevaluación 8.15

Lea y responda en el espacio entre paréntesis si es verdadera con “V” o falsa con “F”.

1.-	( )	El interés compuesto se calcula sobre un nuevo capital que ha ganado intereses.
2.-	( )	La ecuación del interés compuesto es una expresión exponencial
3.-	( )	Si se coloca un capital a tres años plazo quiere decir que son a 9 cuatrimestres.
4.-	( )	Una renta pagadera a fin de cada trimestre es una renta anticipada anual
5.-	( )	Una tasa del 3% capitalizable anual, puede utilizarse con un plazo de 15 meses
6.-	( )	El valor actual o presente de una renta de $100,oo mensuales anticipada, durante 12 años al 6% compuesto anual es de $12.000,oo.
7.-	( )	Una renta anticipada es la que se cancela el primer día del período convenido.
8.-	( )	Un fondo de amortización se utiliza para reponer bienes que tienen una depreciación.
9.-	( )	Se requerirán 60 meses o mas, si se deposita al final de cada mes $200,oo , para liquidar $12.000,oo a uma tasa del 5% capitalizable anualmente.
10.-	( )	La renta de aproximadamente $2.000,oo cubriría una deuda de $10.000,oo al 6% anual durante 4 años.

Verifique sus respuestas en el solucionario al final de la presente guía didáctica.

“Cómo es posible un error en las matemáticas”

Henry Poincare

¡¡Éxitos en la tarea que ha emprendido!!

Ir al solucionario

Resultado de aprendizaje 16

Utiliza la abstracción como una habilidad adquirida para sintetizar y analizar situaciones propuestas que pueden ser modeladas matemáticamente. .

La siguiente semana aprenderá a reconocer una desigualdad y la aplicación de modelos reales que las utilizará en matemática como restricciones o limitantes que están presentes en la vida real.

Enfrentará la resolución de una desigualdad, la identificará, entenderá y comprenderá su propósito, usted mismo será capaz de generar las restricciones que pudiera enfrentar su modelo matemático de manera práctica y sostenida.

Acudirá a metodologías ya aprendidos anteriormente para resolver sistemas de ecuaciones lineales con cualquier número de incógnitas, dominará los métodos, representrá las regiones que son motivo de discusión y de decisión, así como ubicará el conjunto de valores que son la solución a una ecuación objetivo una vez que haya discriminado las restricciones o que la situación que enfrenta satisface estos requerimientos.

Finalmente será capaz de maximizar utilidades o minimizar gastos o costos llevando lo aprendido a situaciones de la vida real.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje

Semana 16

8.6 Desigualdades con dos variables

Hay ocaciones en que una proposición puede tener dos variables a interpretar, pero solo nos dan una condición o propuesta, en estos casos de lo aprndida no se podría solucionar ya que emfrentamos una ecuación con dos incógnitas, a eso podemos sumar que no necesariamente debe ser igual si no que presenta condicione de mayor o menor e igual al mismo tiempo. Entonces la programación lineal ayuda a determinar sectores o zonas en las cuales se cumplen las condiciones de proposición. Son ejemplos el proveer de combustible a los vehículos de una cooperativa de taxis al determinar varias clases de motores, cantidad variable de galones en el tanque de combustible y finalmente sin funcionan a gasolina, gas o eléctricos.

Para estas circunstancias se presenta una metodología que pude ayudar a resolver estas situaciones.

Usted ya sabe resolver una desigualdad con una variable, ya le estudió en capítulos anteriores, ahora suponga que tiene una desigualdad con dos variables como por ejemplo:

$$3x + 2y \leq 50, en\ la\ cual\ x, y \geq 0$$

La solución está representada por una región que corresponde a un biplano en un plano cartesiano. El modelo es el siguiente:

$$ax + by + c < 0, \qquad (a \leq 0, \qquad \geq 0, \qquad > 0)$$

Donde:

a, b, c, son constantes y a y b no son cero.

La solución es geométrica de una desigualdad lineal en x y y, con todos los puntos (x;y) en el plano cuyos puntos satisfacen la desigualdad.

Digamos que tenemos $3x + 2y < 20$, el punto (3;5) arroja la siguiente solución:

$$3x + 2y < 20$$

$$3(3) + 2(5) < 20$$

$$9 + 10 < 20$$

$$19 < 20, OK,$$

Este punto cumple o satisface la desigualdad, pero podría generarse un conjunto infinito de puntos que satisfagan a la desigualdad, de ahí que la solución es una región.

Ejemplo de aplicación dada la desigualdad:

$$2x + y < 5$$

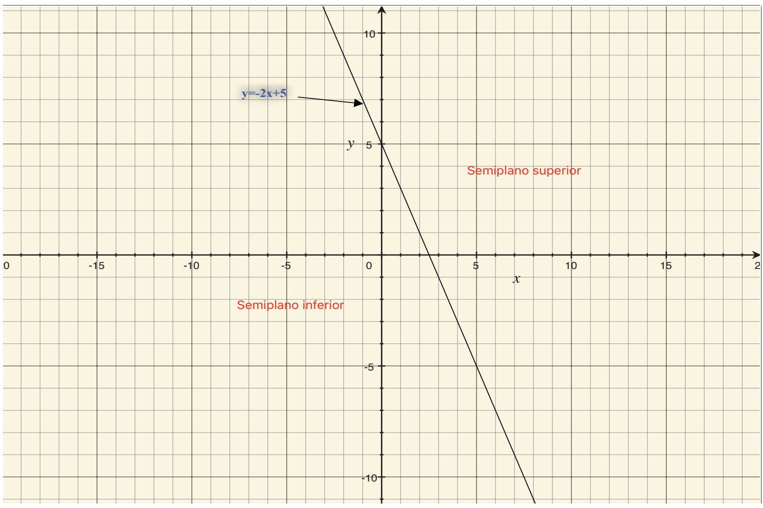
Consideremos primeo como una ecuación para poder determinar la recta y graficarla asi:

$$2x + y = 5$$

Despejando la "y", para tener un modelo y=mx+b, tenemos:

$$y = -2x + 5$$

Se trata de una recta que corta el eje "y" en (0;5) y tiene una pendiente negativa de -2.



La recta divición al plano en dos semiplanos o regiones una de estas, cumplirá la condición inicial, para verificar si una coordenada es punto del conjunto solución, procedemos de la siguiente manera: Escojamos el punto A(2;2), punto que se encuentra en el semiplano superior y reemplacemos sus valores en la desigualdad original, así:

$$2x + y < 5$$

reemplacemos "2" en "x" y "2" en "y", resolviendo la desigualdad tenemos:

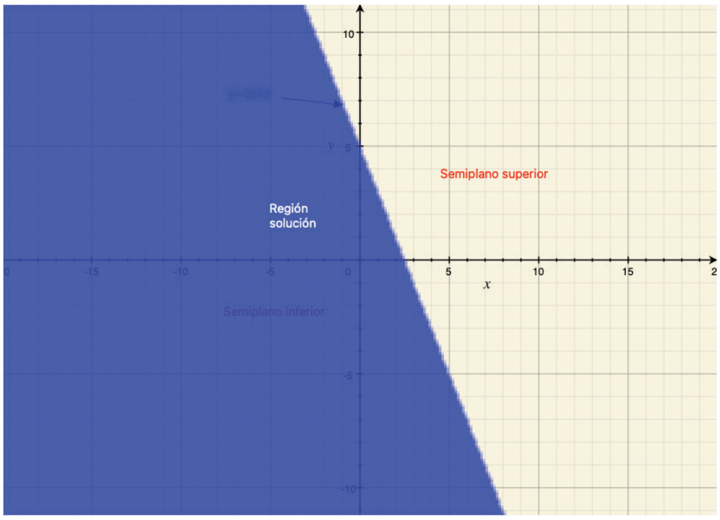
$$2(2) + 2 < 5$$

$$4 + 2 < 5$$

$$\mathbf{6 < 5;}$$

$$la\ respuesta\ no\ satisface\ la\ inecuación.$$

En consecuencia, el punto A, y la región o semiplano superior en el que se encuentra el punto NO es la región solución, será entonces la región de semiplano inferior. A esto se representa de la siguiente manera:



Si prefiere, se puede comprobar con un punto que puede ser el B(0;0), que pertenece al semiplano inferior y verificamos la desigualdad, de siguiente manera:

$$2x + y < 5$$

reemplacemos "0" en "x" y "0" en "y", del punto B, resolviendo la desigualdad tenemos:

$$2(0) + 0 < 5$$

$$0 + 0 < 5$$

$$\mathbf{0 < 5;}$$

$$la\ respuesta\ satisface\ la\ inecuación.$$

Se confirma entonces que el semiplano inferior satisface a la desigualdad.

Revise y resuelva de la página 306 de su Texto básico, el Ejercicio 7,1, los numerales 1 al 6.

Recuerde
Algunos textos grafican la recta con línea segmentada o discontinua cuando la desigualdad contiene el igual,

Ejemplo 71

Encuentre la región solución de la siguiente desigualdad:

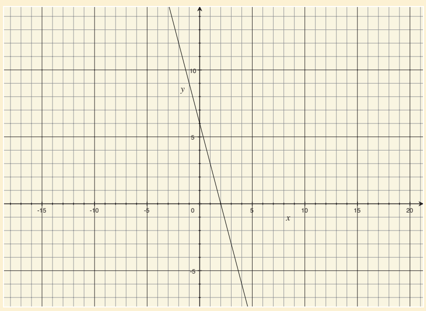
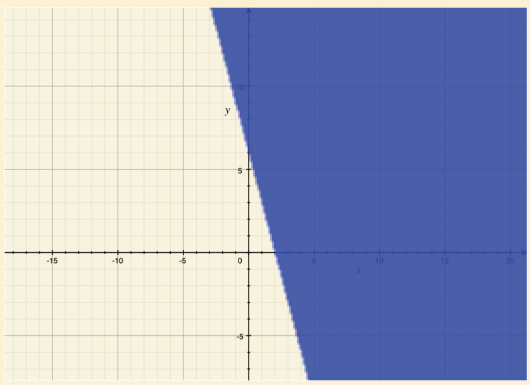
$$6x + 2y > 12$$

Genere la respectiva ecuación, para ser facilmente representada:

$$6x + 2y = 12$$

$$y = \frac{12 - 6x}{2} = 6 - 3x$$

$$\boldsymbol{y = 6 - 3x}$$

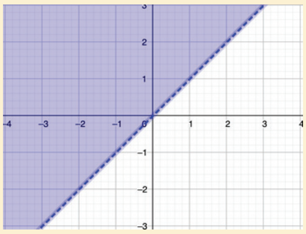
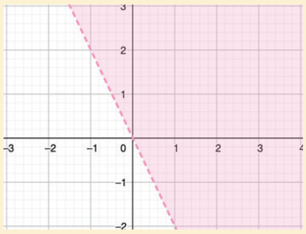
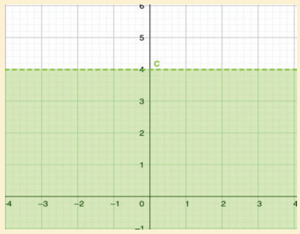
<table>
<tr><td rowspan="6">Represente la recta:
</td><td>Verificación con un punto A(1;2)</td></tr>
<tr><td>$6x + 2y > 12$</td></tr>
<tr><td>$6(1) + 2(2) > 12$</td></tr>
<tr><td>$6 + 4 > 12$</td></tr>
<tr><td>$\mathbf{10 > 12}$</td></tr>
<tr><td>No cumple la desigualdad en el semiplano inferior, por lo tanto la respuesta es la región del semiplano superior. La región solución sería:</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td></tr>
</table>

Esta misma metodología se puede aplicar a sistemas de desigualdades, por ejemplo:

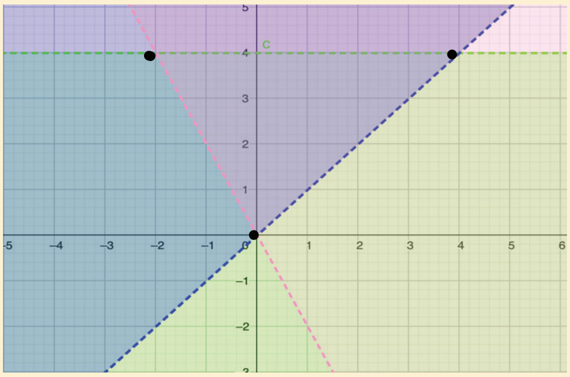
Ejemplo 72

Encuentre la región solución del siguiente sistema de desigualdades:

$$\begin{cases} y > x \\ y: -2x \\ y < 4 \end{cases}$$

$y > x$	$y > -2x$	$y < 4$
		

La intersección de las tres gráficas es la región solución, los puntos negros señalan el triángulo solución.



Revise y resuelva de la página 306 de su Texto básico, el Ejercicio 7,1, los numerales 18 al 24.

8.7 Programación lineal

La matemática ofrece entregar máximos o mínimos en el análisis de una función partiendo de ciertas restricciones, son ejemplos prácticos cuando se desea maximizar las utilidades de una empresa de productos alimenticios con ciertas restricciones en uso de maquinaria o la falta de mano de obra. Aprenderá entonces a maximizar o minimizar una función lineal y que tiene o cumple el siguiente modelo:

$$Z = ax + by$$

Cumplido el modelo se verificará que a y b sean constantes y que las restricciones se encuentren expresadas como desigualdades lineales o ecuaciones lineales, además de que todas las variables sean No negativas .

Un ejercicio o aplicación que en su información tenga todo lo descrito anteriormente se denomina un "Problema de programación lineal".

La función que se va a maximizar o minimizar se denomina **"función objetivo".**

Las restricciones establecidos en un sistema se denomina **"soluciones factibles"**

Entonces una y solo una de este conjunto de soluciones es la solución que maximiza o miniminiza la función a esta solución se la denomina "**solución óptima**"

El siguiente ejemplo explica paso a paso la metodología de resolución:

Ejemplo 73

Una industria de productos alimenticios produce manual y mecànicamente los mismos. Cada producto utiliza tres máquinas electrónicas A, B y C, se conoce que el producto manual requiere la máquina A, durante 2 horas, la B por 1 hora y de la C también una hora. El producto mecánico requiere de la máquina A una hora, en la B, dos horas y una hora en la máquina C. Pero se sabe que las máquinas A, B, C están disponibles 180, 160 y 100 horas al mes respectivamente. La utilidad de la industria en el producto manual es de \$4,oo y en el mecánico de \$6,oo.

La industria vende todo lo que produce, basado en eso cuantos artículos manuales y mecánicos debe producir para maximizar su utilidad por mes.

Llamaremos "x" a los productos manueales y "y" a los mecánicos, como son visibles y se producen estos artículos entonces: $x \geq 0,\ \ y.\ y \geq 0.$

La información se traslada a una tabla para ser visualizada mejor:

	A	B	C	Utilidad
Manual	2 Hs	1 Hs	1 Hs	\$4,oo
Mecánico	1 Hs	2 Hs	1 Hs	\$6,oo
Disponibilidad	180 Hs	160 Hs	100 Hs	

Para cada máquina habrá entonces una desigualdad que muestre el tiempo que necesitan fabricar los dos tipos de artículos, también se puede tabular así:

Máquina A	$2x + y \leq 180$
Máquina B	$x + 2y \leq 160$
Máquina C	$x + y \leq 100$
Utilidad	$P = 4x + 6y$

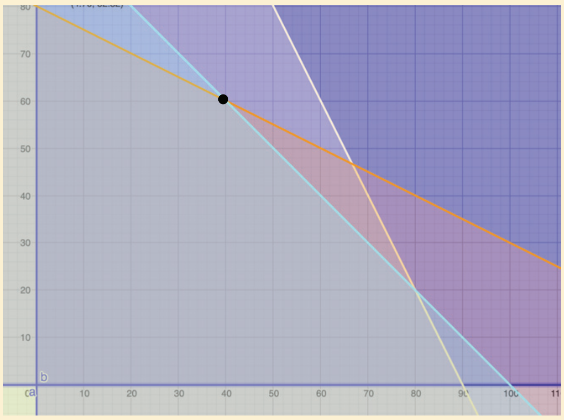
Entonces se deberá maximizar la Utilidad es decir la función:

$$\boldsymbol{P = 4x + 6y}$$

Establezca las restricciones que menciona el problema, así:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x + y \leq 180 \\ x + 2y \leq 160 \\ x + y \leq 100 \end{cases}$$

Busquemos la región de solución y determine cual es la intersección de dos rectas que maximicen la utilidad. Las dos desigualdades en rojo cruzan en un punto máximo, entonces resuelva el sistema y encuentre los valores respectivos.



$$\begin{cases} x + 2y \leq 160 \\ x + y \leq 100 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema por cualquier método, obtenemos lo siguiente:

$$x = 40, \quad y = 60$$

Para hallar la utilidad máxima, simplemente reemplazamos los valores así:

$$P = 4x + 6y$$

$$P = 4(40) + 6(60)$$

$$\boldsymbol{P = \$520, oo}$$

La utilidad se maximiza si producimos 40 productos manualmente y 80 productos mecánicamente.

Revise y resuelva de la página 310 de su Texto básico, el Ejemplo 1 y 2.

Recuerde

Si desea investigar mas y dominar este tema que es muy útil en la práctica, analice y resuelva del Ejercicio 7.2 de su Texto guía los ejemplos del 1 al 10.,

8.8 Aplicaciones de la programación lineal

Revise y resuelva de la página 330 de su Texto básico, el Ejercicio 7,4. los numerales 18 y 19.
Especial atención al ejemplo 3.

Se ha concluido el estudio de esta unidad, siempre le recomiendo revisar lo recomendado hasta que domine el tema en particular y detalles que usted confirma necesita mejorar y así conocer su nivel de conocimientos.

A continuación, le invito a desarrollar la siguiente autoevaluación, cuyo objetivo es conocer cuánto usted ha comprendido del tema, además podrá revisar en la sección del solucionario, la retroalimentación de cada pregunta.

Estoy seguro de que le irá ¡muy bien!

Autoevaluación 8.16

Lea y responda en el espacio entre paréntesis si es verdadera con "V" o falsa con "F".

1.-	( )	La programación lineal contempla un sistema de desigualdades a ser involucrado.
2.-	( )	Por lo general una ecuación objetivo es la utilidad de alguna empresa o industria.
3.-	( )	La región respuesta de un sistema de desigualdades es en donde se superponen los conjuntos solución de cada una de ellas.
4.-	( )	Dado el sistema: $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$, la región solución es el cuadrante comprendido entre el eje "x" positivo y "y" positivo.
5.-	( )	$El\ sistema \begin{cases} y > x \\ y: -2x \\ y < 4 \end{cases}$, aloja al punto de coordenadas (0;4) como un punto que se encuentra en la región respuesta.

Verifique sus respuestas en el solucionario al final de la presente guía didáctica.

"Dios hizo los números enteros, el resto es trabajo de los hombres"

Leopold Kronecker

¡¡Éxitos en la tarea que ha emprendido!!

Ir al solucionario

Solucionario a las Autoevaluaciones

Primer Bimestre

Autoevaluación 1.1		Autoevaluación 1.2		Autoevaluación 2.3		Autoevaluación 2.4	
1	F	1	V	1	F	1	V
2	V	2	V	2	V	2	V
3	V	3	V	3	V	3	F
4	V	4	V	4	V	4	V
5	V	5	V	5	V	5	V
6	V	6	V	6	V	6	V
7	V	7	V	7	V	7	V
8	V	8	V	8	V	8	V
9	V	9	V	9	V	9	F
10	V	10	V	10	V	10	V

Autoevaluación 3.5		Autoevaluación 3.6		Autoevaluación 4.7		Autoevaluación 4.8	
1	V	1	V	1	V	1	V
2	V	2	V	2	V	2	V
3	F	3	F	3	V	3	V
4	F	4	V	4	V	4	V
5	V	5	V	5	V	5	V
6	F	6	F	6	V	6	V
7	V	7	V	7	F	7	F
8	V	8	V	8	V	8	F
9	V	9	V	9	V		
10	V	10	V	10	V		

Segundo Bimestre

Autoevaluación 5.9		Autoevaluación 5.10		Autoevaluación 6.11		Autoevaluación 6.12	
1	V	1	V	1	V	1	V
2	V	2	V	2	V	2	V
3	V	3	V	3	V	3	F
4	V	4	F	4	F	4	V
5	V	5	V	5	V	5	V
6	V	6	V	6	V	6	V
7	F	7	V	7	F	7	V
8	F	8	V	8	V	8	V
9	V	9		9	V	9	V
10	V	10		10	V	10	V

Autoevaluación 7.13		Autoevaluación 7.14		Autoevaluación 8.15		Autoevaluación 8.16	
1	V	1	V	1	V	1	V
2	V	2	V	2	V	2	V
3	V	3	V	3	V	3	V
4	F	4	V	4	F	4	V
5	V	5	V	5	V	5	V
6	V	6	V	6	V		
7	F	7	V	7	F		
8	F	8	V	8	V		
9	V	9	V	9	V		
10	V	10	V	10	V		

IR AL ÍDICE

Imágenes:

- **Fotos:**

https://pixabay.com/es/

- **Gráficos:**

https://www.freepik.com/home

https://all-free-download.com/free-vectors/

FORMATO DE REVISIÓN DE GUÍAS GENERAL DE ESTUDIOS POR PARES ACADÉMICOS (MODALIDAD A DISTANCIA)

<table>
<tr><td colspan="4">IDENTIFICACIÓN DE LA GUÍA GENERAL DE ESTUDIOS</td></tr>
<tr><td colspan="4">TÍTULO DE LA GUÍA GENERAL DE ESTUDIOS DE LA ASIGNATURA: MATEMÁTICA APLICADA</td></tr>
<tr><td colspan="2">FECHA DE ENTREGA DE LA GUÍA GENERAL DE ESTUDIOS DE LA ASIGNATURA: 31/8/2023</td><td colspan="2">FECHA DE ENTREGA DE LA REVISIÓN REALIZADA: 17/10/2023</td></tr>
<tr><td colspan="4">2. DATOS DEL PAR ACADÉMICO (Los siguientes datos deben ser suministrados por el para académico y son de carácter obligatorio)</td></tr>
<tr><td>NOMBRE Y APELLIDOS:
Diego Enrique Polanco Calvachi</td><td colspan="2">DIRECCIÓN:
Av. Buenos Aires OE1-16 y Av. 10 de agosto</td><td>TELÉFONOS;
0999216079</td></tr>
<tr><td colspan="2">CORREO ELETRÓNICO:
dpolanco@tecnologicopichincha.edu.ec</td><td>CIUDAD:
Quito</td><td>PAÍS:
Ecuador</td></tr>
<tr><td>CARGO:
Docente</td><td>INSTITUCIÓN:
Instituto Universitario Pichincha</td><td colspan="2">ÁREAS DE INTERÉS:
Tecnologías Innovación Fuente De Energías Renovables</td></tr>
<tr><td colspan="3">ÚLTIMO TÍTULO ACADÉMICO OBTENIDO:
Cuarto Nivel: Magister en Pedagogía y Docencia en Innovación Educativa</td><td>Nº. DE IDENTIFICACIÓN/ PASAPORTE:
1720749892</td></tr>
</table>

I. INSTRUCCIONES

1. Por favor responda **todas** las preguntas de este formulario.
2. Diligencie el formulario en computador.
3. **No modifique o altere las preguntas u opciones de este formulario**. La estructura de esta evaluación está planificada y responde a las políticas de publicación de las Guías General de Estudios de la MED.
4. Una vez finalice su diligenciamiento, debe devolverlo firmado vía e-mail a la persona que lo contactó.
5. Sea claro y preciso en sus respuestas.

6. Las respuestas del aparte de la fundamentación científica deben ser detalladas.
7. **En caso de no poder cumplir con el plazo** establecido, por favor **informar oportunamente al equipo editorial de la MED.**
8. En caso de detectar plagio, citación indebida o cualquier mala práctica, por favor comuníquelo al equipo editorial.

II. La guía de aprendizaje contiene:

ASPECTOS DE ESTILO A REVISAR	SI CUMPLE	NO CUMPLE
Márgenes	OK	
Numeración de páginas	OK	
Jerarquización de títulos	OK	
Tipo de letra	OK	
No existencia de encabezados o pies de páginas	OK	
Viñetas estandarizadas	OK	
Referencias de cuadros / Gráficos	OK	
Portada en acuerdo a Manual de estilo	OK	
Índice	OK	
Estructura de la guía		
4 unidades	OK	
Resultados de aprendizaje	OK	
Autoevaluación por cada unidad	OK	
Recursos de la guía	OK	
Redacción	OK	
Ortografía	OK	
Referencia Bibliográfica Norma APA séptima edición		OK
Informe anti-plagio	OK	

III. Fundamentación científica

ASPECTOS DE ESTILO A REVISAR	SI CUMPLE	NO CUMPLE
¿Los objetivos del texto están claramente enunciados y sustentados?	OK	
¿Utiliza una metodología adecuada para el desarrollo de los objetivos?	OK	
¿La presentación y argumentación de las ideas es coherente?	OK	
¿El manejo de conceptos, teorías y datos es preciso?	OK	
¿Existe relación entre el título, el problema, los objetivos, el marco teórico o metodológico y las conclusiones?	OK	
¿El tema es pertinente y brinda aportes a su área de conocimiento?	OK	

IV. Presentación de la información

ASPECTOS DE ESTILO A REVISAR	SI CUMPLE	NO CUMPLE
¿El autor utiliza un lenguaje claro y conciso?	OK	
¿Hay coherencia en la presentación y desarrollo de las ideas?	OK	
¿Las partes del trabajo se articulan entre sí y responden a los objetivos planteados?	OK	
¿Utiliza fuentes bibliográficas actualizadas (últimos tres años)?	OK	

¿Es adecuado el manejo del idioma por parte el autor (ortografía, redacción, sintaxis, puntuación)?	OK	
¿El texto se puede considerar original?	OK	

V. Recomendaciones

- Publicar sin modificaciones: X
- Publicar con modificaciones:
- No publicar:

V. Comentarios adicionales

El trabajo es coherente y reúne los requisitos para su publicación: X

FIRMA DEL EVALUADOR
Nombre: Msc. Diego Enrique Polanco Calvachi
ID: 1720749892

CERTIFICADO DE ANÁLISIS
magister

Guía Matemática Aplicada

3% Textos sospechosos

3% Similitudes
< 1% similitudes entre comillas
0% entre las fuentes mencionadas
< 1% Idiomas no reconocidos

Nombre del documento: Guía Matemática Aplicada.docx
ID del documento: d8853b7ee8b9d291e7821b6e4a50f8a7431ddd31
Tamaño del documento original: 6,79 MB

Depositante: PABLO FABIAN CARRERA TOAPANTA
Fecha de depósito: 8/3/2024
Tipo de carga: interface
fecha de fin de análisis: 8/3/2024

Número de palabras: 23.656
Número de caracteres: 144.002

Ubicación de las similitudes en el documento:

Fuentes principales detectadas

N°	Descripciones	Similitudes	Ubicaciones	Datos adicionales
1	**repositorio.unican.es** https://repositorio.unican.es/xmlui/bitstream/handle/10902/1764/Galán Atienza, Benjamín.pdf?sequ... 3 fuentes similares	< 1%		Palabras idénticas: < 1% (163 palabras)
2	**repositorio.espe.edu.ec** https://repositorio.espe.edu.ec/bitstream/21000/13619/5/T-ESPE-053903.pdf.txt	< 1%		Palabras idénticas: < 1% (86 palabras)
3	**1library.co** | Funciones cuadráticas - RECTAS, PARÁBOLAS Y SISTEMAS DE ECUACIO... https://1library.co/article/funciones-cuadráticas-rectas-parábolas-sistemas-ecuaciones.q7w986nv	< 1%		Palabras idénticas: < 1% (92 palabras)
4	**ru.dgb.unam.mx** https://ru.dgb.unam.mx/bitstream/20.500.14330/TES01000673693/3/0673693_A1.pdf	< 1%		Palabras idénticas: < 1% (42 palabras)
5	**matematicai2020.blogspot.com** | TRINOMIO DE LA FORMA ax² + bx + c https://matematicai2020.blogspot.com/2020/02/trinomio-de-la-forma-ax-bx-c.html	< 1%		Palabras idénticas: < 1% (28 palabras)

Fuentes con similitudes fortuitas

N°	Descripciones	Similitudes	Ubicaciones	Datos adicionales
1	**proyecto2000.edu.ec** | Producción Agrícola https://proyecto2000.edu.ec/oferta-academica/carrera-de-desarrollo-agricola/	< 1%		Palabras idénticas: < 1% (37 palabras)
2	**TRABAJO TÉCNICO.docx** | TRABAJO TÉCNICO.docx #052d23 El documento proviene de mi grupo	< 1%		Palabras idénticas: < 1% (28 palabras)
3	**www.lifeder.com** | 80+ frases de matemáticas para estudiantes y maestros https://www.lifeder.com/frases-matematicas/	< 1%		Palabras idénticas: < 1% (23 palabras)
4	**nexmexico.ir** | resolución de desigualdades de primer y segundo grado con una i... https://nexmexico.ir/post/resolución-de-desigualdades-de-primer.p6421	< 1%		Palabras idénticas: < 1% (20 palabras)
5	**uvadoc.uva.es** https://uvadoc.uva.es/bitstream/10324/32171/1/TFM-G852.pdf	< 1%		Palabras idénticas: < 1% (23 palabras)

Matemática Aplicada
Guía general de estudios de la asignatura

© Dr. Ing. Kevin Espinosa Arregui

ISBN Nº:

Edición: Junio 2024

Texto digital proporcionado por el autor.

TALLPA Publicidad Impresa - 2540 662 - 09 9561 4887
Quito - Ecuador

PRÓLOGO

Ha sido y es objetivo fundamental del instituto utilizar herramientas esenciales para que nuestros estudiantes logren alcanzar una formación integral. Bajo esta consideración ponemos a disposición estas guías de estudio que posibilitarán, sin duda, puedan organizarse para comprender el contenido de las diferentes asignaturas.

Estas guías han sido creadas por un equipo de profesionales altamente capacitados en cada asignatura, con el objetivo de convertir su proceso de aprendizaje en una experiencia enriquecedora.

Nuestros docentes han recopilado información, han sintetizado temas, organizado conceptos y aspectos relevantes para que cada guía se presente cuidadosamente elaborada para responder a la realidad actual, con contenidos actualizados y a la vanguardia del conocimiento. La didáctica empleada facilitará la comprensión y aprendizaje de cada tema, permitiéndoles avanzar de manera efectiva en su formación profesional. En la elaboración de estas guías se denota el compromiso del instituto para lograr el éxito académico.

La diagramación de estas guías ha sido pensada para ser clara y atractiva, transmitiendo los conocimientos de manera amena y accesible. Queremos que nuestros estudiantes disfruten del proceso de aprendizaje encontrando en cada página una herramienta útil que les motive a salir adelante en su camino educativo.

Estimados estudiantes: Les deseamos éxito en su recorrido académico, que el Instituto Tecnológico Universitario Pichincha estará siempre pendiente por vuestro éxito educativo.

Dr. Edgar Espinosa. MSc.
RECTOR ISTP-U

ÍNDICE

2. Introducción

La Matemática es una de herramienta fundamental en el desarrollo profesional de cualquier ser humano, por tanto aprender esta ciencia exige comprensión y aplicación de definiciones, propiedades, leyes y conceptos, se hace necesario que usted coceptualize las condiciones para manejar y comprender a los números.

La asignatura de Matemática Aplicada tiene cuatro créditos académicos, de tipo genérico y transversal, es fundamental para su formación, le permitirá desarrollar competencias requeridas en su vida profesional, éste componente pretende que adquiera fundamentos matemáticos básicos y necesarios para carreras como: Administración de Empresas, de Banca, Finanzas, Administración en Gestión Pública, Contabilidad y Auditoría, Economía y Administración de Empresas Turísticas y Hoteleras, entre otras; por tal motivo la planificación se centra en análisis de conceptos, estructuras, reglas, métodos, aplicaciones, interpretaciones y habilidades, para facilitar la comprensión de contenidos de esta asignatura.

La planificación y estructura de la asignatura está descrita en ocho unidades, para dos bimestres:

El primer bimestre inicia con fundamentos del álgebra, es requicito conocimiento de álgebra elemental, análisis de ecuaciones y desigualdades, incluyendo ecuaciones no lineales, con literales, cuadráticas, fraccionarias, con radicales y desigualdades con valor absoluto. El análisis con problemas prácticos complemente a esta unidad. Este bimestre culminará con el estudio de sistemas y métodos de resolucion de ecuaciones.

El segundo bimestre inicia con el algebra matricial, métodos de identificación y reconocimiento de matrices, estudio de las diferentes operaciones y la aplicación del método de Gauss – Jordan. A continuación las funciones, en sus diferentes tipos, su representación gráfica, operaciones, funciones exponenciales y logarítmicas, para finalizar el bimestre con matemática financiera aplicación y cálculo de anualidades.

Como cualquier metodología de aprendizaje, eduacar a distancia es un proceso autónomo que puede pasar de tedioso a sencillo y agradable cuando las actividades que conlleva se las realice de manera responsable, ordenada y secuencial.

3. Competencias para el aprendizaje

Competencias genéricas del ISTHCP

- Pensamiento crítico y reflexivo
- Creatividad y pericia
- Autonomía
- Trabajo en equipo
- Responsabilidad social
- Manejo de tecnología
- Organización y planificación del tiempo
- Investigación
- Razonamiento lógico matemático.

Competencias específicas de la carrera

- Aplicar con ética los conocimientos científicos y tecnológicos, en el campo de las micros y pequeñas empresas y organizaciones.
- Elaborar diagnósticos y análisis de la realidad local, considerando los aspectos de
- soberanía, seguridad, sustentabilidad ecológica, social, cultural, política y ética;
- Desarrollar emprendimientos en el área de micros y pequeñas empresas, talleres artesanales y economía popular y solidaria.
- Integrar los conocimientos, la investigación y la vinculación con la sociedad, a los procesos productivos económicos sociales de las asociaciones y unidades de producción, con competencias para promover el desarrollo local.

Competencias específicas de la asignatura

- Adquiere la destreza del manejo numérico y la capacidad del razonamiento lógico matemático.

- Utiliza la abstracción como una habilidad adquirida para sintetizar y analizar de situaciones propuestas.
- Participa efectiva y frecuentemente en grupos de trabajo, proponiendo soluciones apoyadas en metodologías cuantitativas.
- Demuestra conocimiento en metodologías y técnicas administrativas y financieras aprovechando recursos eficientemente.
- Resuelve y traslada a lenguaje matemática conflictos o problemas empresariales relativos o aplicables al talento humano.
- Proyecta y modela matemáticamente situaciones a mediano y largo plazo empresariales y del personal.
- Puede resolver sistemas de ecuaciones aplicadas a la oferta y demanda administrativa de bienes y servicios.

4. Bibliografía

Básica

Haeussler, E. ; Richard, P. y Richard, W., (2015). *Matemáticas para Administración y economía*. México: Pearson Educación.

El texto cumple con detalles didácticos como los siguientes:

- Actualidad en los temas y aplicaciones a situaciones reales para las carreras de Administración de Empresas, Administración en Banca Finanzas, Administración en Gestión Pública, Contabilidad y Auditoría, Economía y Administración de Empresas Turísticas y Hoteleras.
- Cuida de la presentación y posee un método muy didáctico que facilitará la comprensión de temas seleccionados para esta materia.
- Cada tema finaliza con ejercicios propuestos y autoevaluaciones, para fortalecer y evaluar los conocimientos adquiridos.
- El solucionario que se encuentra en las páginas finales del texto ayuda a contrastar las respuestas.
- Contiene casos prácticos en los que se aplican los contenidos.

Espinosa, K. (2022). *Guía general dídactica de Matemática Aplicada*. Quito, Ecuador: Ed. xxxxxxx

Es ésta guía didáctica que lo guiará en el proceso de aprendizaje con técnicas y métodos para la resolución de problemas y ejercicios. Además le permitirá identificar la secuencia de los temas a estudiar de la asignatura, facilitando, potenciando y activando sus conocimientos en esta ciencia, además de lo siguiente:

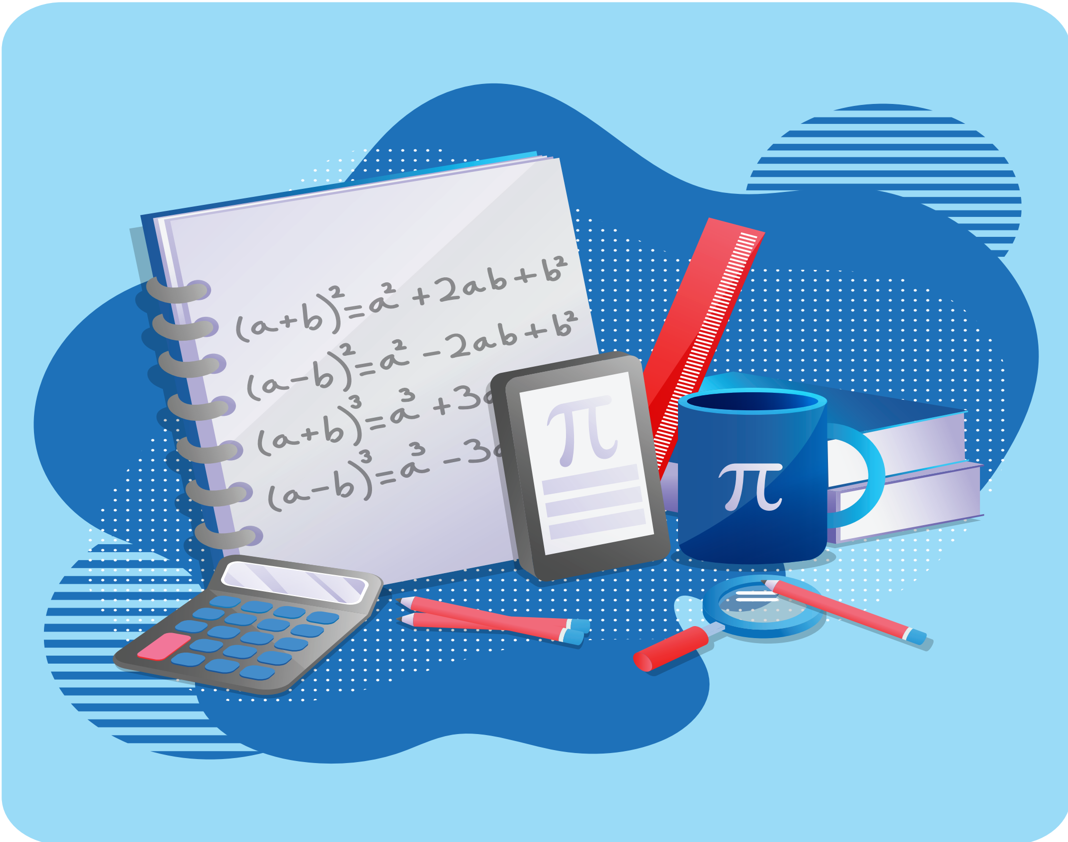
- Cada tema tiene una introducción y más de 100 ejemplos desarrollados paso a paso, gráficas, ejercicios de retroalimentación y aplicaciones a la vida real que le permitirán comprender y dominar el tópico.
- Las actividades adicionales son recomendadadas y autoevaluadas, algunas de estas tendrán relación con el texto básico, las autoevaluaciones siempre se encuentran al final de cada unidad con las soluciones en las páginas finales de la guía.
- Encontrará las evaluaciones a distancia, este documento puede utilizarlo como un borrador, puesto que las soluciones deberá ingresarlas en el Entorno Virtual de Aprendizaje "EVA" en los días y horas indicadas en el calendario académico.

Complementaria

Jagdish, C. Ayra, W., Lardner (2015). Matematicas Aplicadas a la Administracion y a la Economia, México. Pearson Educación.

Este texto tene el propósito de complementario porque refuerza las orientaciones dadas por el texto principal, no descuida otras áreas de estudio, presenta ejemplos prácticos que le permitirán al estudiante relacionar la aplicación de esta ciencia a situaciones prácticas de su vida cotidiana y sobretodo profesional.

De igual manera encontrará al final de cada tema varios ejercicios propuestos, para poner en práctica los conocimientos adquiridos, además resolverá problemas con temáticas diferentes, que no han sido incluidos en el texto básico o en esta guía general didáctica.

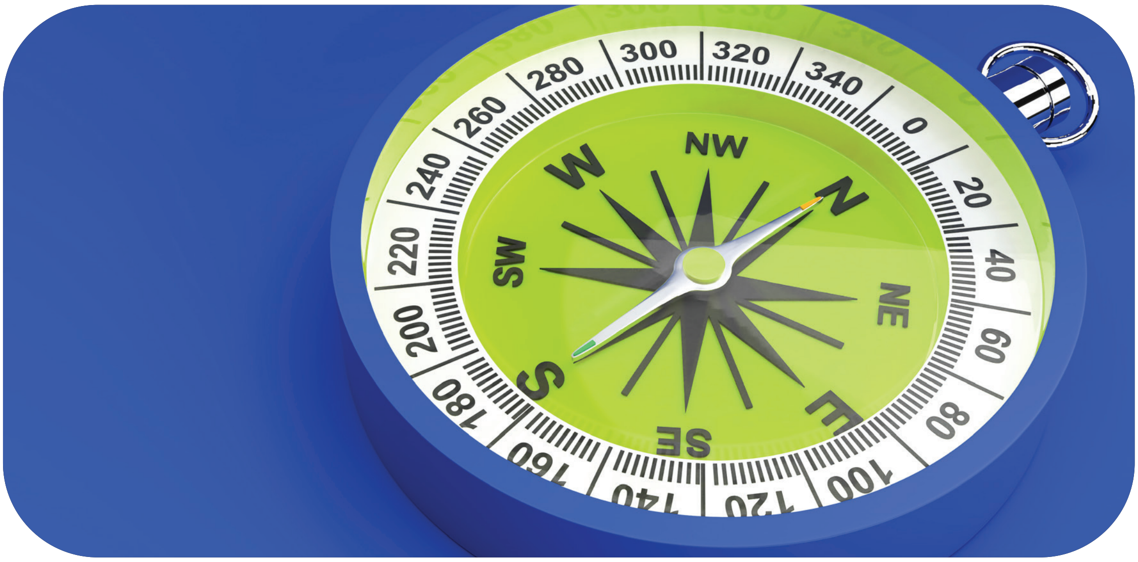


5. Metodología de aprendizaje

Un aprendizaje basado en análisis y estudios de casos, en el que se presentará al estudiante situaciones reales o hipotéticas para su análisis; de tal manera, que, asuma un rol diligente para relacionar, medir y comparar los contenidos teóricos con la práctica y ser capaz de proponer soluciones previa la revisión de recursos complementarios como lecturas, artículos, presentaciones, diagramas, etc., que aporten información adicional.

En cuanto al aprendizaje a través de las TICs, se desarrollaràn actividades académicas propuestas, a través de la interacción en la plataforma MOODLE, propiciando el interés, la motivación, la dinámica de un aprendizaje cooperativo y creativo que requiere de la partipación constante, en actividades síncronas como asíncronas.

La permanente orientación y guía del docente tutor, es parte de la metodología de aprendizaje también, las tutorías despejan dudas u obstáculos que a partir de su análisis previo, necesite para tomar una decisión apegada a situaciones reales que necesiten de la matemática para su conclusiòn.



6. Orientaciones generales para el estudio

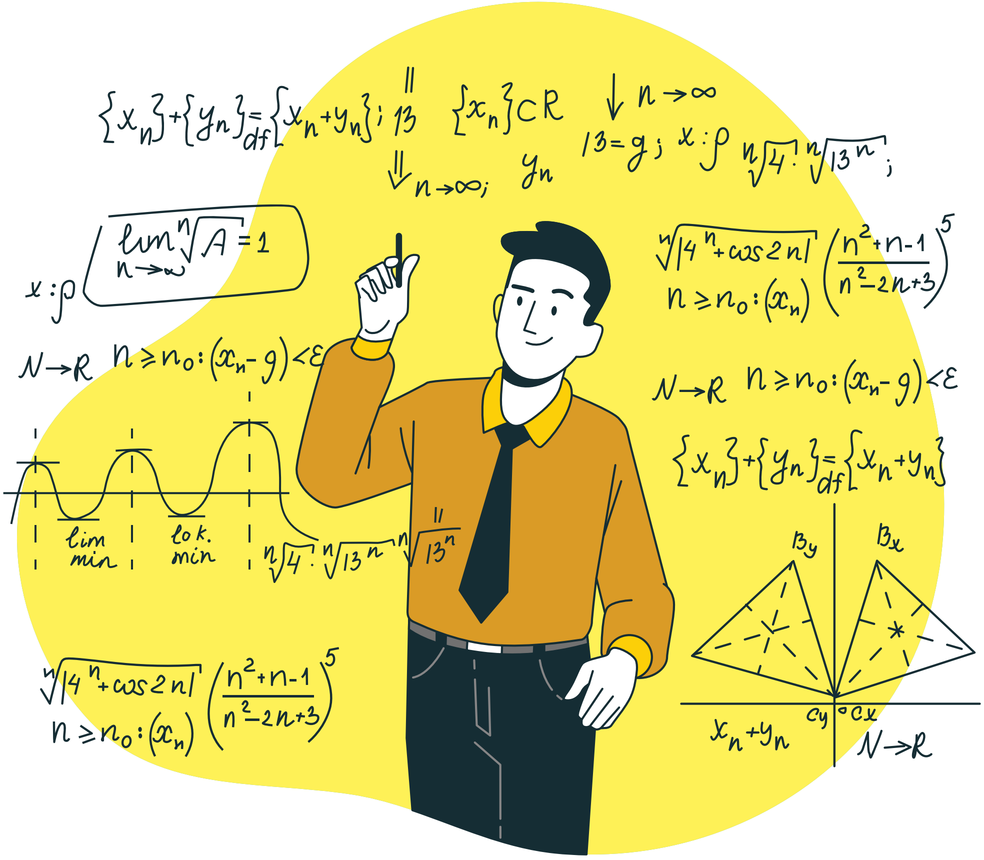
Srta. o Sr. estudiante, para que su aprendizaje sea significativo y lleve la secuencialidad de los procesos, se recomienda tener en cuenta éstas orientaciones:

- Son materiales necesarios para el estudio, el texto básico, la guía didáctica y las evaluaciones a distancia.
- Es conveniente trabajar de manera simultánea con el texto y la guía didáctica.
- Los materiales de papelería básicos, como un cuaderno, lápiz y borrador, que le permitan realizar anotaciones y desarrollar ejercicios son necesarios.
- Deberá dedicarle por lo menos 4 hotas por semana a estudiar ésta materia, para lo cual programar un horario es fundamental.
- Lea y comprenda el texto básico, en el tema o unidad correspondiente, revise y analize la guía didáctica y emprenda los ejemplos ilustrativos, realice las actividades recomendadas y resuelva la autoevaluación al final de cada unidad.
- Estudie de manera secuencial los temas asegurando la comprensión de ellos, dedique mas tiempo a los conceptos, definiciones y la aplicación de propiedades.
- La variedad de ejercicios y problemas incluidos son tomados del texto básico y libros complementarios seleccionados por componentes que le permiten observar cómo aplicar las matemáticas que está aprendiendo, además dispondrá de más ejercicios que le aseguran fortalecer su aprendizaje.

- Antes de empezar un nuevo tema, asegúrece de haber comprendido la unidad anterior. Si aún tiene dudas, repase nuevamente, consulte con su profesor tutor, quien le ayudará a clarificar los tópicos de mayor conplejidad.
- Adicionalmente las 8 autoevaluaciones incluidas tambien le permiten practicar y retroalimentar con las soluciones al final de la presente guía.
- Elabore sus tareas a distancia constante y paulatinamente, evite retrazos y acumulaciones, recuerde es una por cada bimestre, su presentación es obligatoria, en el Entorno Virtual de Aprendizaje (EVA), en los días y horas indicadas en su calendario académico.
- Cada bimestre tiene 8 semanas, utilice 6 para su estudio autónomo, desarrollo de las autoevaluaciones y evaluación a distancia, y 2 semanas para repaso y preparación a la prueba presencial.
- Siempre es útil comunicarse con su tutor si tiene dificultades. Encuentre el horario de tutorías y los datos de contacto en el aula virtual correspondiente.
- El material virtual implementado por la institución brindará el ingreso a sus evaluaciones a distancia, encontrará asesoría para la asignatura, material en digital y la posibilidad de interactuar con el profesor y compañeros. Acceda a través de la dirección electrónica www.tecnológicopichincha.edu.ec.
- En ésta guía se incluye la "planificación para el trabajo del alumno", revísela, y programa su estudia por que es un aporte importante a su estudio.
- Genere un aprendizaje autónomo, responsable y organizado. Siga de forma adecuada indicaciones y autoevaluaciones de cada unidad, sepa que son estrategias de aprendizaje que le permitirán conocer su avance académico.

Nota:

Por su participación en el EVA con actividades como chat, foros y video – colaboración, usted será acreedor de hasta un punto adicional por cada actividad, esto quiere decir que podrá incrementar su calificación hasta con tres puntos.



Primer Bimestre

Resultado de aprendizaje	Sabe y conoce los antecedentes y nociones generales o básicas de la Matemática

Por medio de este resultado de aprendizaje, usted llegará a determinar la evolución de la matemática a través del tiempo e identificará los números como símbolos necesarios para el desarrollo del conocimiento de la humanidad.

En la presente unidad se conocerá los números su origen, evolución, tipos y aplicación de estos en situaciones reales, para lo cual deberá identificar, ubicar y utilizar de adecuada manera en problemas y ejercicios propuestos.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje

Unidad 1. Fundamentos del Algebra

Semana 1

Esta unidad expone conceptos fundamentales ya estudiados por usted, y al considerarlos importantes se hace impresindible que los recuerde y que además sepa que son útiles para todos los contenidos que va ha adquirir durante el curso de matemática aplicada, estos temas empiezan por conocer y saber que son y para que sirven los tipos de números utilizados hoy en día y todos los demás tópicos que son cimiento de varios contenidos que es nuestro deber recordarles y resumirlos para que lo conozcan de manera práctica.

Al remontarse a la historia los primeros conocimientos de referencias de utilización de matemáticas en una cultura datan del 3.000 antes de Cristo. Empezaron a surgir en la zona de Egipto y Babilonia y posteriormente se fueron expandiendo por todo el mundo. Esta cultura utilizaba las matemáticas como una pura aritmética.

Se continúa con el estudio de los números y se amplía hasta los números reales.También se estudian las distintas representaciones de los números como los números fraccionarios, los porcentajes y los números decimales. Va a ser una gran opción incluir distintas numeraciones de diversas culturas, y comentar los diversos tipos de representación.

Según Sánchez Ávila (14), se debe destacar que lo principal no es la destreza del cálculo

sino la comprensión operacional que permite el adecuado uso de las matemáticas. Paralelamente se desarrollará el estudio de la capacidad de estimar magnitudes y la del cálculo mental.

Introducir la historia para el tratamiento de este tema, sería comentar que el pueblo egipcio fue el primer pueblo que inició este tipo de cálculos con números decimales o fracciones.

¿Qué son los Nùmeros?

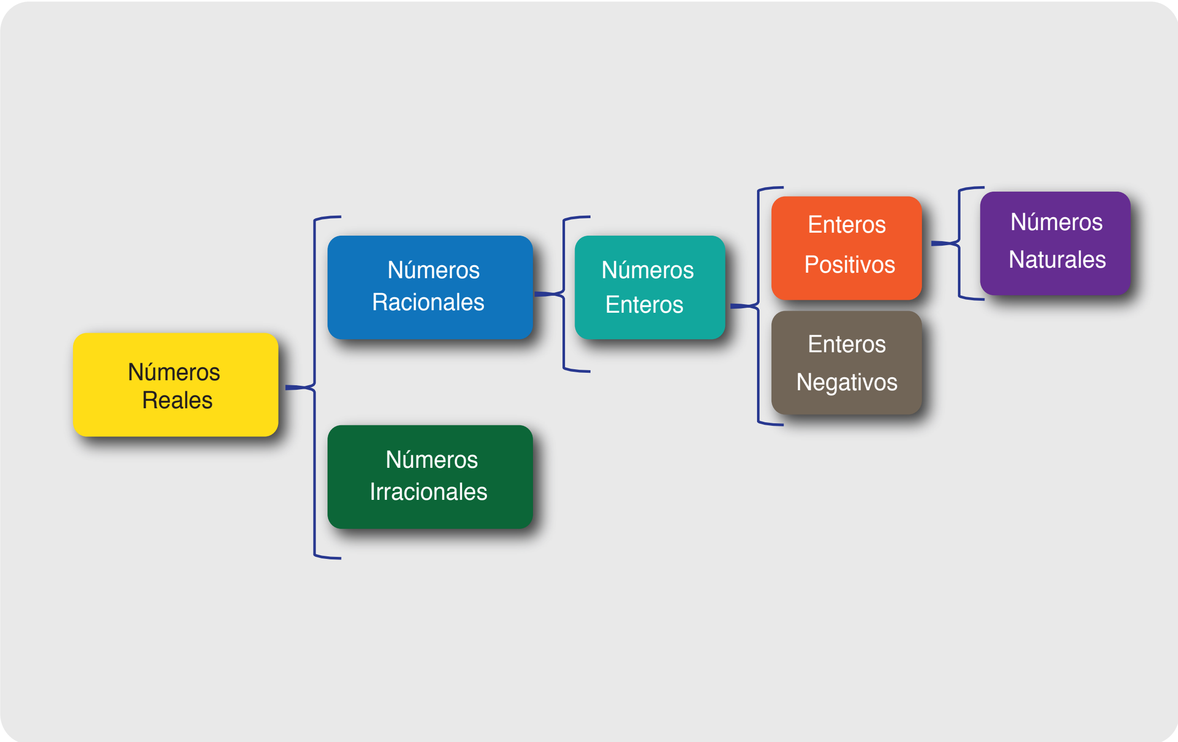
Son elementos básicos de la matemática usado para contar, medir, resolver ecuaciones y comparar cantidades, éstos están comprendidos en un gran grupo denominado números Reales y a su vez éste grupo lo constituyen diferente clase o tipo de números con sus propias características que se les ha denominado naturales, enteros, racionales e irracionales.

1.1 Números Reales

Es el conjunto de todos los números naturales, enteros, positivos y negativos, los racionales, (fracciones o quebrados) y los números irracionales, mismos que pueden ser expresados mediante notación decimal.

El siguiente gráfico describe la clasificación de los númeross, donde los números reales son el conjunto universo y en él están inmersos los números racionales e irracionales.

Figura 1. *Números Reales:*



Nota Fuente. de Espinosa. K, (2021), Guía Didáctica Matemática, Quito: ISTHCPP

Los Números Naturales

Ejemplos de números naturales:

- Los números del celular
- Los números de casa dirección

Características

- Son mayores que el “cero”
- Sirven para contar.
- No tienen parte decimal.

Actividades

Escribir su ejemplo:

....

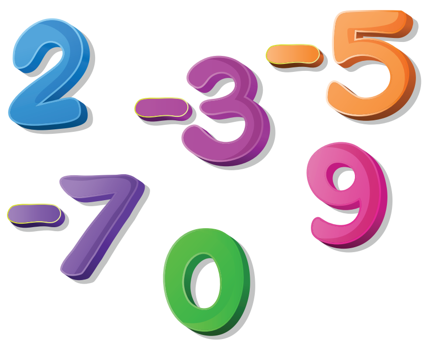
Los números 1, 2, 3, 4,......se usan para contar y son los primeros que se aprenden en la primaria, a estos les llamamos: números naturales. Esta sucesión de números es infinita y se encuentra representada por la letra “N”, así:

$$\boldsymbol{N} = \{\mathbf{1;2;3;4;5;6;7;} \dots \dots \mathbf{10;} \dots \dots \dots ..\}$$

> Nota:
> Algunos autores no incluyen al número cero “0” como un número natural, sin embargo es útil para el 10, 100, 1000

....

Los Números Enteros



Son ejemplos los siguientes

- Los números del ascensor
- Los números del aC y dC
- La Temperatura bajo cero.

Características

- Incluyen el “cero”
- Incluyen a los Naturales.
- Incluyen a los negativos
- No tienen parte decimal.

ACTIVIDADES

Escriba su ejemplo:

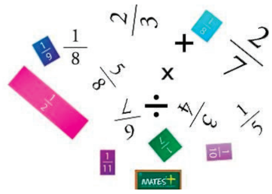
....

Los números naturales junto al “0”, positivos y negativos, forman el conjunto de los números enteros, representados por la letra “Z”, asi:

$$Z = \{\dots\dots -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\dots..\}$$

Recuerda:
Los números naturales son parte de los números enteros.

Nota:
Solo los números negativos escriben el signo “menos”, los enteros positivos no requieren el signo “mas”.

Se los representa con “Q” y se forman al relacionar dos números Enteros: ... -3/2, - 2/2, -1/2, 0/3, 1/4, 2/4, ... Son los quebrados o fraccionarios y los que se pueden dividir para “1”.	**Los Números Racionales** 
Características • Incluyen el “cero” como numerador pero no como denominador. • Incluyen a los Enteros. • Forman decimales.	**Tipos de decimales** Si los decimales son finitos o Si los decimales son infinitos y repetitivos son nùmeros Racionales.
Son ejemplos los siguientes • La media de estatura, Ej. 122,4 cm. • 1,5; 2,125; 5,123123123...	**Actividades** Escriba su ejemplo: ....

Los números racionales, se forman por expresar en una división dos números enteros, son los comunmente llamos quebrados o números fraccionarios representados por la letra “Q”, algunso ejemplos son:

$$Q = \left\{\dots\dots -\frac{1}{3}; -\frac{1}{2}; \frac{2}{1}; \frac{5}{2}; \frac{5}{1}; \dots\dots..\right\}$$

Nota:
Todo número esta dividido para ”1” aunque no se escribe, es el caso del número “2, 5”, por lo tanto son número racionales.

$-\frac{3}{0};\frac{2}{1}$

Recuerda:
La división para cero no esta definida en matemática y no se utilizará.

Estos números racionales también pueden mostrarse de manera decimal; para lo cual su resultado debe ser que sus cifras decimales sean exactas o periódicas así:

$-\frac{1}{2} = -0,5$	$\frac{5}{11} = 0,45454545 \ldots \ldots \ldots$
Decimal exacto	Decimal periódico

Recuerda:
Los números enteros son un subconjunto de los números racionales.

Se los representa con "I" y Son los que no resultan de la divisiòn de dos números Enteros: -3,1235… - , 1,73205…; ;	**Números Irracionales** 
Características • No son Racionales. • Generalmente son constantes. Si tienen parte decimal	**Tipos de decimales** • Si los decimales son infinitos y no repetitivos.
Son números racinales los siguientes • El valor de π, (3,14…..) • El Valor de $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$…. • El Valor de "e", (2,718281828….)	**Actividades** Escriba su ejemplo: ………………………………………

Ahora, ¿dónde quedan aquellos números fraccionarios que presentan decimales inexactos y no- periódicos?, a estos les corresponde el conjunto de números irracionales, se los representa con la letra Q'.

Algunos ejemplos de este tipo de números son:

$-\sqrt{3} = -1,73205$	$\pi = 3,14158$
Decimales inexactos y periódicos	

Recuerda:
Revise el apartado 0.2 de su texto básico, las páginas 3 y 4, en donde encontrará la teoría y ejemplos prácticos de las propiedades de los números reales.

1.2 Exponentes

Estimado estudiante la multiplicación de un número o símbolo por sí mismo, ya sea 2, 3, 4 o más, puede abreviarse, para ello simplemente utilizamos exponentes, tal cual como se lo detalla a continuación:

$$a^n = a.a.a.a.a.a.a \ldots \ldots . . a, donde \text{ "a" es el exponent y "n" el exponente.}$$

Ejemplo 1

$$3^4 = 3.3.3.3 = 81$$

$$3 \rightarrow base, 4 \rightarrow exponente$$

Ejemplo 2

$$2^5 = 2.2.2.2.2 = 32$$

$$2 \rightarrow base, 5 \rightarrow exponente$$

$0^o = 1$ Definición consistente y muy útil.

1.3 Radicales

Los radicales, se los puede expresar como:

$$a^{\frac{x}{y}} = \sqrt[y]{a^x} = \left(\sqrt[y]{a}\right)^x$$

$$\sqrt{81} = 9$$

$$2 \rightarrow raiz\ cuadrada, 2 \rightarrow índice$$

$$\sqrt[5]{32} = 2$$

$$5 \rightarrow raiz\ quinta, 5 \rightarrow índice$$

Recuerda:
En cualquier potencia, si el exponente es negativo, la base no debe ser cero, y si el exponente contiene una raíz par, la base no puede ser negativa.

Las leyes básicas de los exponentes y radicales se encuentran en la página 10 de su texto básico. Revise antes de continuar.

Autoevaluación 1.1

Lea y analice las preguntas siguientes y responda en el espacio entre paréntesis si la proposición es verdadera con "V" o falsa con "F".

1.-	( )	$3x^2 - \{2x^2 - xy - [x(x+4y) - y(2x-y)] + 3xy\} - 3y^2 = 2x^2 - 2y^2$
2.-	( )	El valor de la expresión $\frac{4x+16}{10+4x}$ $es\ igal\ a\ 4, cuando\ x = -2.$
3.-	( )	El siguiente polinomio es completo: $2x^5 + 3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 6x - 4$
4.-	( )	De $-10x^4 + 30x^3y - 15y^4\ restar - 10x^4 + 25x^3y - 143y^4, da$: $5x^3y - y^4$
5.-	( )	En la siguiente expresión $x = y\left[\frac{(1+i)^m - 1}{i}\right]; cuando\ m = 3; i = 2; x = 26$ Entonces y=2
6.-	( )	El siguiente polinomio es homogéneo: $22x^5 - 2x^3y^2 + 6xy^4 - 4y^5 + 20$
7.-	( )	La expresión $2x^5 - 2x^3y^2 + 6xy$ Se refiere a un polinomio ordenado.
8.-	( )	$\sqrt[m]{x}.\sqrt[n]{x} = \sqrt[mn]{x}$
9.-	( )	$\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}} = \sqrt[12]{2}$
10.-	( )	$\frac{4}{\sqrt{2x}} = \frac{2\sqrt{2x}}{x}$

Verifique sus respuestas en el solucionario que se encuentra al final de la presente guía didáctica.

"Si puedes soñarlo, puedes hacerlo"

Walt Disney

¡¡Éxitos en la tarea que ha emprendido!!

Ir al solucionario

1.4 Operaciones básicas con números reales

Los polinomios se generan de combinar números y letras, mediante una o más operaciones básicas, como: adición, sustracción, multiplicación, división, exponenciación, radicación, etc. Algunos ejemplos que se pueden citar son:

$$(5x + 7y - 3) + (3y - 2x + 9)$$

$$(a + 3b)(2x + y)$$

$$(5x - 2y)^2$$

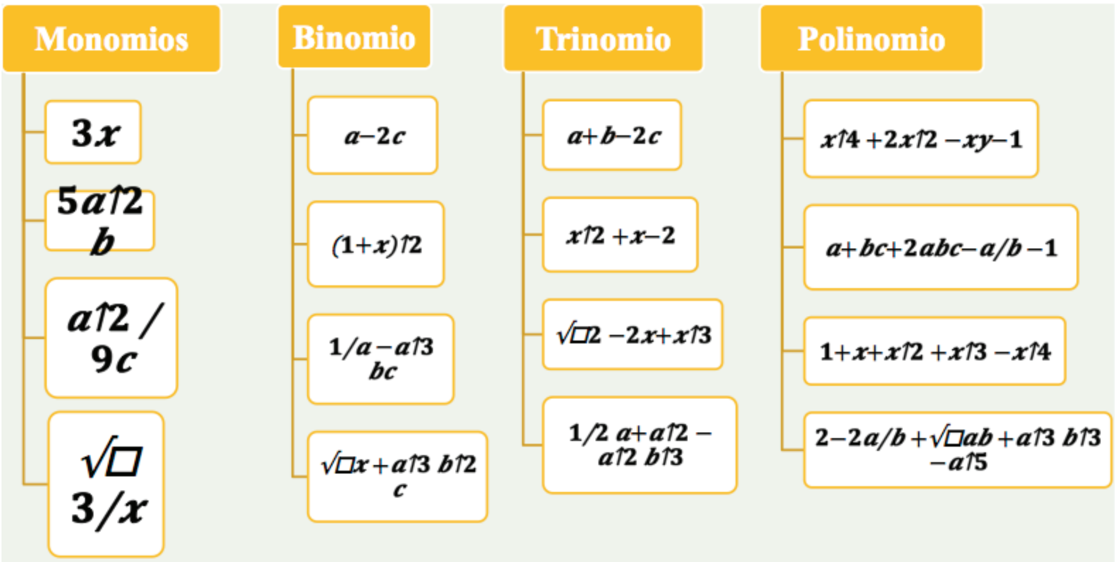


Figura 2. *Expresiones Algebraicas*

Elaborado por.Espinosa. K, (2022), Guía Didáctica Matemática, Quito: ISTHCPP

Recuerda:
En general una expresión que contiene más de un término se denomina "multinomio".

1.4.1 Adición de polinomios

La suma o adición de polinomios es una operación en la que dos o más polinomios se asocian para agregarse ordenadamente y obtener un tercero que es el resultado o respuesta.

Recuerda:
Que los términos semejantes son aquellos que solo difieren por sus coeficientes numéricos.

Recuerda:
La Resta o Sustracción es la suma del opuesto de un número llamado sustraendo.
Ejemplo: De 5 Restar 2

$$5 \rightarrow minuendo$$

$$2 \rightarrow sustraendo\ u\ opuesto\ del\ número\ "-2"$$

5+(-2) =5-2=3.

Ejemplo 3

Para sumar $(2x^2+2x-5)+(x^2-5x-3)-2x^2-2$, se puede procesar asi:

$$2x^2+2x-5+x^2-5x-3-2x^2-2$$

Se eliminaron los signos de agrupación

$$2x^2+x^2-2x^2+2x-5x-5-3-2$$

Se agruparon y resuelven términos semejantes

$$x^2-3x-10, \quad \text{Rta.}$$

1.4.2 Sustracción de polinomios

Usted debe recordar que la resta es la operación opuesta a la suma y bajo este principio para poder realizar esta operación es preferible convertirla en suma, es decir al minuendo se le adiciona o suma el opuesto del sustraendo

Ejemplo 4

De $(2x^2+2x-5)\ Restar\ (x^2-5x-3)$, se puede procesar asi:

$$2x^2+2x-5-(x^2-5x-3)$$

Se elimina signos de agrupación e identifica el sustraendo

$$2x^2+2x-5-x^2+5x+3$$

Se aplicó el principio del opuesto del número al eliminar el signo de agrupación

$$x^2+7x-2$$

Se reducieron términos semejantes

$$x^2+7x-2, \quad Rta.$$

1.4.3 Multiplicación de polinomios

Se llama multiplicación de polinomios cuando cada monomio de un polinomio se multiplica por cada uno de los términos del otro polinomio.

Ejemplo 5

Multiplique $(x^2 + 2x - 2)$ *por* $(x^2 - 5x - 1)$,

se puede procesar mediante la propiedad distributiva, asi:

$$(x^2 + 2x - 2)(x^2 - 5x - 1),$$

$$\boldsymbol{x^2x^2 - x^25x - x^2 + 2xx^2 - 2x5x - 2x - 2x^2 + 10x + 2}$$

Se elimina signos de agrupación y aplicò la propiedad distriburiva

$$\boldsymbol{x^4 - 5x^3 - x^2 + 2x^3 - 10x^2 - 2x - 2x^2 + 10x + 2}$$

Se multiplica y simplifica las expresiones

$$x^4 - 5x^3 + 2x^3 - x^2 - 10x^2 - 2x^2 - 2x + 10x + 2$$

Se ordenan y agrupan por términos semejantes

$$x^4 - 3x^3 - 13x^2 + 8x + 2$$

Se redujeron términos semejantes y ordenando así:

$$\boldsymbol{x^4 - 3x^3 - 13x^2 + 8x + 2,} \qquad \boldsymbol{Rta.}$$

Recuerda:
Si se multiplican signos iguales, respuesta positiva.
Si se multiplican signos desiguales respuesta negativa.

A continuación, le invito a desarrollar la siguiente autoevaluación, cuyo objetivo es conocer cuánto usted ha comprendido del tema, además podrá revisar en la sección del solucionario, la retroalimentación de cada pregunta.

Se ha concluido el estudio de esta primera unidad, siempre le recomiendo revisar lo recomendado hasta que domine el tema en particular y detalles que usted confirma necesita mejorar y así conocer su nivel de conocimientos.

Estoy seguro de que le irá ¡muy bien!

Resultado de aprendizaje 2

Utiliza la abstracción como una habilidad adquirida para sintetizar y analizar situaciones propuestas.

Por medio de este resultado de aprendizaje, usted llegará a resolver ejercicios con signos de agrupación, reconocerá e intervendrá para eliminar denominadores y convertir una expresión simple en sus factores.

Dominar y conocer los casos para factorar aplicando metodologías específicas englobados en los casos pertinentes y una vez determinado la situación será capaz de simplificar expresiones inclusive complejas desde una simple suma algébrica hasta convertirlo en su producto equivalente.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje

1.5 Elimninación de signos de agrupación

Los signos de agrupación son paréntesis, corchetes y llaves y para simplificar se deben eliminar estos símbolos, mediante el siguiente proceso:

Ejemplo 6

Sinplifique la expresión $4\{2x[3+2x]+2[4x^2-(1-4x)]\}$,

Elimine los signos de agrupación más internos, que pueden ser los paréntesis, asi:

$$4\{2x[3+2x]+2[4x^2-\mathbf{(1-4x)}]\},$$

$$4\{2x[3+2x]+2[4x^2-1+4x]\},$$

Luego continúe con los corchetes

$$4\{2x[\mathbf{3+2x}]+2[\mathbf{4x^2-1+4x}]\},$$

$$4\{6x+4x^2+8x^2-2+8x\},$$

Finalmente las llaves debe eliminarlas

$$4\{\mathbf{6x+4x^2+8x^2-2+8x}\}$$

$$24x+16x^2+32x^2-8+32x$$

Se reducen términos semejantes

$$\mathbf{48x^2+56x-8}, \quad \text{Rta.}$$

Ejemplo 7

Sinplifique la expresión $-5\{2x^2(x+1)-4[x^2-(3-2x)]\}$,

Elimine los signos de agrupación más internos, que pueden ser los paréntesis, asi:

$$-5\{2x^3+2x^2-4[x^2-3+2x]\},$$

Se aplicó la propiedad distributiva

$$-5\{2x^3+2x^2-4x^2+12-8x\},$$

Se aplicó la propiedad distributiva

$$-10x^3-10x^2+20x^2-60+40x$$

Se aplicó la propiedad distributiva

$$-10x^3+10x^2+40x-60$$

Se reducen términos semejantes

$$\mathbf{-10x^3+10x^2+40x-60}\ , \quad \text{Rta.}$$

Ejemplo 8

Sinplifique la expresión $-\{-5[2a+2b-1]+5[a+2b]-a[2(b+1)]\}$

Elimine los signos de agrupación más internos, asi:

$$-\{-10a-10b+5+5a+10b-a[2b+2]\}$$

Se aplicó la propiedad distributiva

$$-\{-10a-10b+5+5a+10b-2ab-2a\}$$

Se aplicó la propiedad distributiva

$$10a+10b-5-5a-10b+2ab+2a$$

Se aplicó la propiedad distributiva

$$3a+2ab-5$$

Se reducen términos semejantes

$\mathbf{3a+2ab-5}$, Rta.

Ejemplo 9

Sinplifique la expresión $5(x^2-y^2)+x(y-3x)-4y(2x+7y)$

$$5x^2-5y^2+xy-3x^2-8xy-28y^2$$

Propiedad distributiva

$$2x^2-7xy-33y^2$$

Se reducen términos semejantes

$\mathbf{2x^2-7xy-33y^2}$, Rta.

Ejemplo 10

Sinplifique la expresión $-5\{4x^2(2x+2)-2[x^2-(5-2x)]\}$

$$-5\{8x^3+8x^2-2x^2-2[x^2-5+2x]\}$$

Elimine los signos de agrupación y aplique propiedad distributiva

$$-5\{8x^3+8x^2-2x^2-2x^2+10-4x\}$$

Otra vez propiedad distributiva

$$-40x^3-40x^2+10x^2+10x^2-50+20x$$

Reducir los términos semejantes

$\mathbf{-40x^3-20x^2+20x-50}$, Rta.

Ejemplos resueltos paso a paso con operaciones básicas con polinomios lo encontrará en su texto básico entre las páginas 14 y

1.6 Factorización

Si dos o más expresiones algebraicas se multiplican, estas son factores y son el producto.

El proceso de convertir una suma algébrica dada, en una expresión dada como el producto de factores se denomina factorización de la expresión, se examinarán ciertos métodos para factorizar expresiones:

Reglas de Factorización	
$\boldsymbol{xy + xz = x(y+z)}$	Factor común
$\boldsymbol{x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)}$	Trinomio cuadrado perfecto
$\boldsymbol{abx^2 + (ab+cd)x + cd = (ax+c)(bx+d)}$	
$\boldsymbol{x^2 + 2ax + a^2 = (x+a)^2}$	Trinomio cuadrado perfecto
$\boldsymbol{x^2 - 2ax + a^2 = (x-a)^2}$	Trinomio cuadrado perfecto
$\boldsymbol{x^2 - a^2 = (x+a)(x-a)}$	Diferencia de cuadrados
$\boldsymbol{x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3 = (x+a)^3}$	Suma de cubos
$\boldsymbol{x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3 = (x-a)^3}$	Diferencia de cubos

Figura 2. *Reglas de Factorización*

Elaborado por:Espinosa. K, (2022), Guía Didáctica Matemática, Quito: ISTHCPP

1.7 Factor común

Existe cuando en todos los términos de un polinomio se repiten una o más letras, o los coeficientes numéricos contienen algún factor que es común para todos ellos.

$$48abc - 24ab^2 + 12a^2bcd + 6abcde$$

Para su factorización tomamos el coeficiente numérico de menor valor (6 en este caso), porque se encuentra contenido en el resto de términos, y las letras a y b que son comunes en todo el polinomio, con lo que obtenemos lo siguiente:

$$6ab(8c - 4b + 2acd + cde)$$

Recuerda:
En factor común usted también puede agrupar uno o varios términos para optar por este tipo de factorización.

Ejemplo 14

Factore la expresión $3ab - bc + 3am - mc$

Deberá agrupar los términos que son factores comunnes, con la condición de que estos grupos deberán ser de igual número de términos, luego en cada grupo aplicar el procedimiento:

$$(3ab - bc) + (3am - mc)$$

Agrupe en dos binomios que tengan factores comunes

$$b(3a - c) + m(3a - c)$$

Propiedad distributiva a la inverza

$$(3a - c)(b + m)$$

Propiedad distributiva a la inverza

$$\boldsymbol{(3a - c)(b + m)}, \quad \text{Rta.}$$

Otra manera de agrupar es:

$$(3ab + 3am) - (bc + mc)$$

Agrupe en dos binomios que tengan factores comunes

$$3a(b + m) - c(b + m)$$

Propiedad distributiva a la inverza

$$(b + m)(3a - c)$$

Propiedad distributiva a la inverza

$$\boldsymbol{(b + m)(3a - c)} \quad \boldsymbol{Rta.}$$

El resultado es el mismo en ambos procedimientos, ¿verdad?, entonces desarrolle ejercicios, encontrará de este tipo en el texto básico, capítulo 0, páginas 20 y 21 y su resultado al final del texto. ¡Éxitos en su resolución!

1.8 Diferencia de cuadrados

Concidere que en la teoría de los productos notables consta la diferencia de cuadrados, misma que factorizada nos da el producto de la suma por la diferencia de sus raíces cuadradas.

Ejemplo 15

Factore la expresión $9a^2b^4 - \frac{4}{81}m^2$

Reconoce que es una diferencia de cuadrados.

$\left(3ab^2 - \frac{2}{9}m\right)\left(3ab^2 + \frac{2}{9}m\right)$, Rta.

Un caso particular de analizar es la factorización de suma o diferencia de cubos, para lo que se debe tener en cuenta lo siguiente:

$$\boldsymbol{a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)}$$

$$\boldsymbol{a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)}$$

Ejemplo 16

$$64x^3 - y^3 = (4x - y)(16x^2 + 4xy + y^2)$$

$$\boldsymbol{(4x - y)(16x^2 + 4xy + y^2)} \quad \text{Rta.}$$

¡Listo!, ahora ya puede revisar más ejemplos de factorización.

1.9 Trinomios

Los trinomios cuadrados perfectos, por ejemplo, están conformados por dos términos que son cuadrados perfectos y positivos, el tercer término corresponde al doble producto de las raíces de los dos anteriores.

Ejemplo 17

Factore la expresión $9a^2 - 12ab + 4b^2$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$3a \qquad\qquad 2b$$

$$2(3a)(2b) = 12ab$$

Las raíces de los dos términos que son cuadrados perfectos positivos las elevamos al cuadrado, considerando el signo del término que corresponde al doble producto de estas raíces, de esta manera obtenemos el resultado.

$$\boldsymbol{9a^2 - 12ab + 4b^2 = (3a - 2b)^2} \quad \text{Rta.}$$

Pero existen trinomios que no poseer estas características, para los cuales el procedimiento es diferente, como los que cuyo resultado sean dos factores:

Recuerde:
Tome en cuenta que el coeficiente cuadrático siempre será "1".

Caso 1:

Ejemplo 18

Factore la expresión $a^2 - 5a + 6$

$$1a^2 - 5a + 6$$

Deberá encontrar dos factores del término constante "6", y que además sumados algebraicamente den el coeficiente de "a" esto es "-5".

Estos factores son -2 y -3:

$$6 = (-2)(-3) \rightarrow \textit{Término constante.}$$

$$-5 = (-2) + (-3) \rightarrow \textit{Coeficiente de } \text{a.}$$

Se divide al primer término en dos grupos y se le agrega los términos encontrados:

$$\boldsymbol{a^2 - 5a + 6 = (x - 2)(x - 3) \quad Rta.}$$

Caso 2:

Recuerde:
Tome en cuenta que el coeficiente cuadrático será diferente de "1".

Ejemplo 19

Factore la expresión $3a^2 + 11a + 6$

$$3 \neq 1$$

$$3a^2 + 11a + 6$$

Deberá multiplicar el coeficiente del término cuadrático por el término constante asi:

3(6) = 18

Se busca dos factores que resulte 18 y que además sumados algebraicamente den el coeficiente de "a" esto es "11". Estos factores son 9 y 2:

$$18 = (9)(2) \rightarrow \text{Multiplicados.}$$

$$11 = 9 + 2 \rightarrow \text{Sumados.}$$

Se reemplaza el coeficiente del segundo término por los dos factores encontrados

$$3a^2 + (9 + 2)a + 6$$

Aplique la propiedad y elimine el signo de agrupación.

$$3a^2 + 9a + 2a + 6$$

Agrupe los términos para que puedan ser factorados por factor comíun.

$$(3a^2 + 9a) + (2a + 6)$$

Aplique factor común las veces que sean necesarias.

$$3a(a + 3) + 2(a + 3)$$

$$\boldsymbol{(a + 3)(3a + 2)} \quad \boldsymbol{Rta.}$$

¡Listo!,¿El procedimiento le ha resultado complicado?
Veamos entonces otra manera de factorar estos trinomios.

Ejemplo 20

Factore la expresión $4x^2 + 8\text{x} + 3$

Deberá multiplicar a todo el polinomio por el coeficiente del término cuadrático y se divide para el mismo, así no se altera la expresión.

$$4x^2 + 8\text{x} + 3 = \frac{4(x^2 + 8x + 3)}{4} = \frac{(4x)^2 + 8(4x) + 4(3)}{4}$$

Busque dos números que multiplicados de 4(3) = 12, y sumados algebricamente de 8, que es el coeficiente de "x". asi:

$$\frac{(4x)^2 + 8(4x) + 4(3)}{4}$$

$$= \frac{(4x)^2 + 8(4x) + 12}{4} = \frac{(4x + 6)(4x + 2)}{4}$$

Factor común en cada parêntesis

$$\frac{2(2x + 3)2(2x + 1)}{4}$$

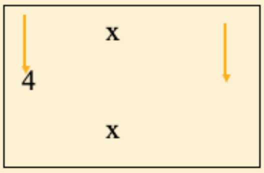
Sinplifique y termina asi:

$$\boldsymbol{(2x + 3)(2x + 1)} \quad \boldsymbol{Rta.}$$

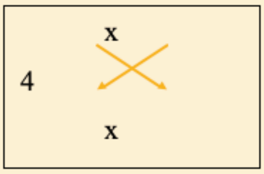
Ejemplo 21

Factore la expresión $x^2 + x - 12$

Se buscan dos factores que al multiplicarse entre sí den como resultado el término constante y sumados lagebraicamente den como resultado el término de “x”.



La suma del resultado de multiplicar en cruz ambos factores debe ser igual al segundo término:



$$-3x^2 + 4x = x$$

“x” es el segundo término del trinomio.

El resultado se encontrará expresado por la multiplicación de factores encontrados asi:

$$\boldsymbol{(x+3)(x-3)} \quad \boldsymbol{Rta.}$$

¡Listo!, ejercicios complementarios sobre factoreo le puedes encontrar en el Ejercicio 0,7 del Texto básico en la página 25.

A continuación, le invito a desarrollar la siguiente autoevaluación, cuyo objetivo es conocer cuánto usted ha comprendido del tema, además podrá revisar en la sección del solucionario, la retroalimentación de cada pregunta.

Se ha concluido el estudio de esta primera unidad, siempre le recomiendo revisar lo recomendado hasta que domine el tema en particular y detalles que usted confirma necesita mejorar y así conocer su nivel de conocimientos.

Seguro le irá bien.

Autoevaluación 1.2

Lea y responda en el espacio entre paréntesis si es verdadera con "V" o falsa con "F".

1.-	( )	$Los\ productos\ de\ x^2 - 9y^2, son{:}\ (x-3y)(x-3y)$
2.-	( )	El valor de la expresión $\frac{4x^2-16}{2x+4} = 2x - 4.$
3.-	( )	Factorada la expresión: $2x^5 + 4x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 2x,\ los\ factores\ son{:}\ 2x(x^4 + 2x^3 - x^2 + 3x - 1)$
4.-	( )	$Los\ factores\ de\ x^4 + 13x^2 + 30, son{:}\ (x+3)(10+x)$
5.-	( )	Al racionalizar la siguiente expresión: $\left[\frac{(1+i)^m-1}{\sqrt{2}}\right]; el\ resultado\ es{:}\ \sqrt{2}\left[\frac{(1+i)^m-1}{2}\right];$
6.-	( )	$El\ congujado\ de\ 2\sqrt{x} - \sqrt{yz}, es\ \sqrt{yz} + 2\sqrt{x}$
7.-	( )	Los factores siguientes: $(a-b)(a-b), provienen\ de{:}\ a^2 - 2ab + b^2.$
8.-	( )	$La\ expresión{:}\ (a+b+c) - x(a+b+c) - (c+a+b)y, es\ igual\ a{:}$ $(1-x-y)(a+b+c)$
9.-	( )	$La\ expresión{:}\ (a+1)^3 - 8, es\ equivalente\ a{:}$ $(a-1)((a+1)^2 + 2(a+1) + 4)$
10.-	( )	La expresión siguiente: $\frac{4}{a^2} - \frac{1}{b^2}, tiene\ como\ factores{:}$ $\left(\frac{2}{a} - \frac{1}{b}\right)\left(\frac{2}{a} + \frac{1}{b}\right)$

Verifique sus respuestas en el solucionario que se encuentra al final de la presente guía didáctica.

"Las matemáticas son el lenguaje son el idioma que uso Dios para escribir el mundo"
Galileo Galilei

¡¡Éxitos en la tarea que ha emprendido!!

Ir al solucionario

Resultado de aprendizaje 3

Utiliza la abstracción como una habilidad adquirida para sintetizar y analizar situaciones propuestas.

En este resultado de aprendizaje, usted llegará a identificar polinomios y resolver ejercicios con signos de agrupación en los que se involucre la suma y resta de los mismos.

Dominará la metodología básica que a partir de operaciones básicas determinará garantizando que domina operaciones complementarias como la multiplicación y división de polinomios desde propuestas básicas hasta complejas.

Se pondrá especial atención a la división larga de polinomios y sus especificaciones iniciales para poder realizarlas.

Finalmente, con el conocimiento previo del factoreo del contenido anterior, reconocerá e intervendrá para eliminar denominadores y convertir expresiones racionales en simples y mínimas logrando simplificarlas.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje

Semana 3

2. Operaciones algebraicas

2.1 Suma y resta de polinomios

La Suma y resta de polinomios o expresiones polinómicas se deben simplificar cuando se identifican términos semejantes es decir aquellos que tienen la misma parte literal. Estos son ejemplos:

$$2a + a + b - 3b + 3a + 6b$$

Agrupe los términos semejantes por esta vez:

$$2a + a + 3a + b - 3b + 6b$$

$$\mathbf{6a + 4b}, \quad \text{Rta.}$$

Ejemplo 22

Simplifique el siguiente ejercicio:

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} - x - y$$

Se agrupan términos semejantes:

$$\frac{x}{2} - x + \frac{y}{3} - y$$

Se suma algebricamente

$$-\frac{x}{2} - \frac{2y}{3}, \quad \textit{Rta.}$$

Recuerda:
Cuando se suman algebraicamente términos con el mismo signo se deberá SUMAR y la respuesta conserva el signo del número mayor o más alto.

Recuerda:
Cuando se suman algebraicamente términos con signo diferente se deberá RESTAR y la respuesta conserva el signo del número mayor o más alto.

2.2 Multiplicación y división

La multiplicación y división de polinomios o expresiones polinómicas se deben simplificar factorando siempre y cuando sea posible y luego se identifican términos semejantes es decir aquellos que tienen la misma parte literal. Estos son ejemplos simples:

$$\frac{2(a+1)}{4}\frac{(a-2)}{a^2-1}$$

puede factorar y sinplificar:

$$\frac{\cancel{2}\cancel{(a+1)}}{\cancel{4}}\frac{(a-2)}{\cancel{(a+1)}(a-1)}$$

$$\frac{\mathbf{1\,(a-2)}}{\mathbf{2\,(a-1)}}, \quad \boldsymbol{Rta.}$$

Recuerda:
Multiplicar numerador y denominador entre si, y aplicar las reglas de los signos de la multiplicación.

2.3 Productos especiales

Existen ciertos productos especiales que pueden obtenerse a partir de la propiedad distributiva y son útiles al multiplicar expresiones algebraicas. A continuación se presentarán algunos casos especiales:

Productos Especiales	
$\boldsymbol{x(y+z)=xy+xz}$	Propiedad distributiva
$\boldsymbol{(x+a)(x+b)=x^2(a+b)x+ab}$	
$\boldsymbol{(ax+c)(bx+d)=abx^2+(ab+cd)x+cd}$	
$\boldsymbol{(x+a)^2=x^2+2ax+a^2}$	Binomio al cuadrado
$\boldsymbol{(x-a)^2=x^2-2ax+a^2}$	Binomio al cuadrado
$\boldsymbol{(x+a)(x-a)=x^2-a^2}$	Producto de la suma y diferencia
$\boldsymbol{(x+a)^3=x^3+3ax^2+3a^2x+a^3}$	Binomio al cubo
$\boldsymbol{(x-a)^3=x^3-3ax^2+3a^2x-a^3}$	Binomio al cubo

Figura 2. *Proouctos Especiales*

Elaborado por.Espinosa. K, (2022), Guía Didáctica Matemática, Quito: ISTHCPP

Ejemplo 23

Aplique una de las reglas dadas y resuelva el ejercicio: $(3x+2)^3$

$$= (3x)^3 + 3(2)(3x)^2 + 3(2)^2(3x) + (2)^3$$

Se aplicó la regla 7, un binomio al cubo.

$$\boldsymbol{= 27x^3 + 54x^2 + 36x + 8,\quad Rta.}$$

Recuerde:
Solo existen 8 reglas para solucionar un producto especial.

¡Listo!,¿La aplicación de estas reglas las puede encontrar en las páginas 16 y17 de su texto básico, existen varios ejemplos desarrollados sobre el tema?

2.4 Expresiones racionales

Una expresión racional es una combinación de variables y constantes de la forma:

$$\frac{a(x)}{b(x)}$$

$$\text{Donde } a(x)\ y\ b(x), son\ polinomios\ cualquiera\ y\ b(x) \neq 0.$$

Dado que las variables incluidas en las expresiones algebraicas representan números reales, las propiedades se aplican también a las expresiones algebraicas. A continuación se presenta la solución más común con este tipo:

2.4.1 Simplificación de expresiones racionales

Una expresión racional está simplificada cuando ha sido reducida a su mínima expresión, esto es cuando el numerador y el denominador no tienen factores comunes distintos de 1 y -1.

Ejemplo 24

Simplifique la siguiente expresión algebraica:

$$\frac{4x^2 - 20x + 24}{6 + 10x - 4x^2}$$

Ordane los polinomios de ser necesario:

$$\frac{4x^2 - 20x + 24}{-4x^2 + 10x + 6} = \frac{4(x^2 - 5x + 6)}{-2(2x^2 - 5x - 3)}$$

Factore por completo numerador y denominador:

$$\frac{\cancel{4}(x-2)\cancel{(x-3)}}{\cancel{-2}(2x+1)\cancel{(x-3)}}$$

Simplifique factores y términos comunes:

$$\frac{2(x-2)}{-(2x+1)}$$

Se puede pocisionar el signo negativo al numerador o al inicio de la fracción asi:

$$\frac{-2(x-2)}{(2x+1)} = -\frac{2(x-2)}{(2x+1)} \quad \textit{Rta.}$$

Los ejemplos que se encuentran en la página 21, 22 y 23 de su texto base, le ayudarán a resolver ejercicios un poco más complejos, cuide al simplificar.

2.5 Multiplicación y división de expresiones racionales

Este tema será tratado en forma separada, acompañado de los ejemplos respectivos.

2.4.1 Multiplicación de expresiones racionales

En la multiplicación de expresiones algebraicas racionales, se debe multiplicar numeradores y denominadores entre si. Para facilitar este proceso puede iniciar simplificando, si es posible, los factores comunes que se presenten.

Autoevaluación 2.3

Lea y responda en el espacio entre paréntesis si es verdadera con "V" o falsa con "F".

1.-	( )	$Los\ productos\ de\ x^2 - 9y^2, son: (x-3y)(x-3y)$
2.-	( )	El valor de la expresión $\frac{4x^2-16}{2x+4} = 2x - 4.$
3.-	( )	De la expresión: $2x^5 + 4x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 2x,\ los\ factores\ son:$ $2x(x^4 + 2x^3 - x^2 + 3x - 1)$
4.-	( )	$Los\ factores\ de\ x^4 + 13x^2 + 30, son: (x+3)(10+x)$
5.-	( )	Al racionalizar la siguiente expresión: $\left[\frac{(1+i)^m-1}{\sqrt{2}}\right]; el\ resultado\ es: \sqrt{2}\left[\frac{(1+i)^m-1}{2}\right];$
6.-	( )	$El\ congujado\ de\ 2\sqrt{x} - \sqrt{yz}, es\ \sqrt{yz} + 2\sqrt{x}$
7.-	( )	Los factores siguientes: $(a-b)(a-b), provienen\ de: a^2 - 2ab + b^2.$
8.-	( )	$La\ expresión: (a+b+c) - x(a+b+c) - (c+a+b)y, es\ igual\ a:$ $(1-x-y)(a+b+c)$
9.-	( )	$La\ expresión: (a+1)^3 - 8, es\ equivalente\ a:$ $(a-1)((a+1)^2 + 2(a+1) + 4)$
10.-	( )	La expresión siguiente: $\frac{4}{a^2} - \frac{1}{b^2}, tiene\ como\ factores:$ $\left(\frac{2}{a} - \frac{1}{b}\right)\left(\frac{2}{a} + \frac{1}{b}\right)$

Verifique sus respuestas en el solucionario al final de la presente guía didáctica.

"Las matemáticas puras son, en su forma, la poesía de las ideas lógicas"

Albert Einstein

¡¡Éxitos en la tarea que ha emprendido!!

Ir al solucionario

Resultado de aprendizaje 4

Utiliza la abstracción como una habilidad adquirida para sintetizar y analizar situaciones propuestas.

Con este resultado de aprendizaje, usted llegará a identificar expresiones y resolver ejercicios estimados y considerados como fracciones o expresiones racionales que involucran todas las operaciones básicas, esto es suma, resta, multiplicación y división.

Conocerá y dominará la metodología que a partir de operaciones básicas determinará garantizando que domina la simplificación por cualquier método aprendido, añadiendo ahora la eliminación de denominadores con radicales.

La racionalización de polinomios a partir de sus denominadores para simplificar aún mas expresiones de difícil resolución, como son el caso de expresiones con literales y aquellas que traen implícitas expresiones de simplificación previa por factoreo.

Finalmente, con el conocimiento de la racionalización de binomios y el conjugado llegar a eliminar cantidades radicales y reemplazarlas con otras equivalentes que permitan mejor su interpretación y aplicación futura.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje

2.6 División larga

Una vez que usted ha comprendido el procedimiento para dividir un multinomio entre un monomio, se encontrará apto para de realizar divisiones entre polinomios o división larga, a continuación estudie el procedimiento para su resolución:

Ejemplo 27

Divida la siguiente expresión algebraica:

$$(3x^2 - 4x + 3) \div (3x + 2)$$

Ordene los dividendos en forma decreciente respecto de una variable, si el polinomio está incompleto es conveniente dejar un espacio en blanco.

$$\begin{array}{r|l} 3x^2 - 4x + 3 \quad 3x + 2 & \\ \hline -3x^2 - 2x & x - 2 \\ -6x + 3 & \\ -6x + 4 & \\ 7 & \end{array}$$

El resultado queda expresado de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{x - 2 + \frac{7}{3x + 2} \qquad Rta.}$$

Ejemplo 28

Divida la siguiente expresión algebraica:

$$x^4 + 2x^2 + 1 \div x - 1$$

Se debe ordenar los polinomios y efectivamente lo están.

Deje los espacios de aquellos términos que no constan inicialmente pero que podrán aparecer a medida que el procedimiento avance.

$$
\begin{array}{l|l}
x^4 \qquad + 2x^2 \quad + 1 & x - 1 \\ \cline{2-2}
-x^4 + x^3 & x^3 + x^2 + 3x + 3 \\ \cline{1-1}
\quad x^3 + 2x^2 + \quad\quad +1 & \\
\quad -x^3 + x^2 & \\ \cline{1-1}
\qquad\quad 3x^2 \qquad + 1 & \\
\qquad -3x^2 + 3x & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad\quad 3x + 1 & \\
\qquad\qquad -3x + 3 & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad\quad 4 &
\end{array}
$$

El resultado queda expresado de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{x^3 + x^2 + 3x + 3 + \frac{4}{x - 1}} \quad \boldsymbol{Rta.}$$

Ejemplo 29

Divida la siguiente expresión algebraica:

$$\frac{\frac{4x}{x^2 - 1}}{\frac{2x^2 + 8x}{x - 1}} = \frac{4x}{(x^2 - 1)} \frac{(x - 1)}{(2x^2 + 8x)} = \frac{4x(x - 1)}{[(x + 1)(x - 1)][2x(x + 4)]}$$

Se factora y simplifica asi:

$$\boldsymbol{\frac{2}{(x + 1)(x + 4)},} \quad \boldsymbol{Rta.}$$

Ejemplo 30

Simplifique el ejercicio siguinete:

$$\frac{t}{3t + 2} - \frac{4}{t - 1} = \frac{t(3t + 2)(t - 1)}{(3t + 2)} - \frac{4(3t + 2)(t - 1)}{(t - 1)}$$

Multiplicandot todo el denominador a todos los términos en el numerador

Se factora y simplifica asi:

$$t(t-1)4(3t+2)$$

Multiplicando o aplicando la propiedad distributiva:

$$(t^2-t)(12t+8)$$

$$12t^3-12t^2+8t^2-8t$$

Se resuelven términos semejantes asi:

$$12t^3-4t^2-8t$$

$$\mathbf{4t(3t^2-t-8)}, \quad \boldsymbol{Rta.}$$

Recuerde:
Para dividir polinomios es preferible factorar denominadores y conseguir eliminarlos al multiplicar el máximo común divisor a cada numerador de cada término.

El ejercicio 0.8 reúne varios ejemplos con grado de complejidad mayor y variado que le ayudará a mejorar la simplificación, ponga especial atención a los ejemplos 49 y 50.

En esta Unidad, se ha recordado a los números reales las operaciones básicas con polinomios, conocimientos que usted adquirió en el bachillerato.
Resuelva la autoevaluación y si sus respuestas coinciden con las que se encuentran al final ¡Congratulaciones!` significa que se encuentra en condiciones de desarrollar la evaluación a distancia que corresponda al primer bimestre.

Racionalización de denominadores

A eliminar los radicales de los denominadores se le denomina "Racionalizar", el resultado será una fracción equivalente donde el denominador ya no tiene radical.

2.6.1 Racionalización del tipo $\frac{a}{\sqrt[n]{b}}$, $para\ b > 0$

En este caso es eliminar el radical del denominador cuando es un monomio.

Ejercicios complementarios los puede encontrar en el ejercicio 0,5 de su texto básico, los ejemplos 59 al 68 de la página 16.

Ejemplo 11

Racionalize la siguiente expresión algebraica:

$$\frac{2}{\sqrt{3}}$$

Se multiplica al numerador y denominador el valor del radical asi:

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Simplifique el radical y la respusta es:

$$\boldsymbol{\frac{2\sqrt{3}}{3}} \quad \boldsymbol{Rta.}$$

Ejemplo 12

Racionalize la siguiente expresión algebraica:

$$\frac{2}{\sqrt[6]{3x^5}}$$

Es conveniente expresar la expresión en exponenetes fraccionarios.

$$\frac{2}{3^{\frac{1}{6}}x^{\frac{5}{6}}}$$

Se multiplica al numerador y denominador una fracción que permita quedar elevado a exponente "1" cada término del denominador a fin de eliminar el radical :

$$\frac{2}{3^{\frac{1}{6}}x^{\frac{5}{6}}}\frac{3^{\frac{5}{6}}x^{\frac{1}{6}}}{3^{\frac{5}{6}}x^{\frac{1}{6}}}=\frac{2}{3^{\frac{1}{6}}3^{\frac{5}{6}}}\frac{3^{\frac{5}{6}}x^{\frac{1}{6}}}{x^{\frac{5}{6}}x^{\frac{1}{6}}}=\frac{2}{3}\frac{3^{\frac{5}{6}}x^{\frac{1}{6}}}{x}$$

Asocie de mejor manera el numerador:

$$\frac{2(3^5x)^{\frac{1}{6}}}{3x}$$

Regresando a expresar como radical:

$$\boldsymbol{\frac{2\sqrt[6]{3^5x}}{3x}}, \quad \boldsymbol{Rta.}$$

2.6.2 Racionalización del tipo $\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$

Este tipo de expresiones poseen en el denominador binomios con radicales, el proceso a seguir es multiplicar el numerador y el denominador por el "conjugado" del denominador.

Recuerda:
El conjugado es el binomio del denominador cambiado de signo así, $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ como denominador tiene como conjugado $\sqrt{a}-\sqrt{b}$

Ejemplo 13

Racionalize la siguiente expresión algebraica:

$$\frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$$

El conjugado del denominador $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ es, $\sqrt{2}-\sqrt{3}$

$$\frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$$

Se multiplica al numerador y denominador por el conjugado y se obtiene:

$$\frac{2(\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2}$$

El denominador se convierte en una diferencia de cuadrados, por la propiedad 6 de los "productos especiales". Además la ley 17 de las "Leyes de los exponentes y radicales".

$$\frac{2(\sqrt{2}-\sqrt{3})}{2-3}=\frac{2(\sqrt{2}-\sqrt{3})}{-1}=\frac{(-1)2(\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(-1)(-1)}$$

Se puede multiplicar por -1 al numerador y denominador y expresar la respuesta asi:

$$\mathbf{-2(\sqrt{2}-\sqrt{3})} \quad \textbf{\textit{Rta.}}$$

Recuerda:
La finalidad de la racionalización de binomios con radicales conlleva a obtener una diferencia de cuadrados que permite eliminar los radicales.

Puede tener cierta dificultad su resolución, pero puedes ayudarte revisando el Ejemplo 4 en la página 28 de su Texto básico.

2.7 Simplificación de expresiones fraccionarias y literales

Para resolver este tipo de ejercicios, bastará con dividir cada término del multinomio por el monomio.

Recuerde:
Para dividir un polinomio, el grado del divisor debe ser menor o igual que el del dividendo.

Ejemplo 26

Simplifique la siguiente expresión algebraica:

$$\frac{40x^4y^5z^3 - 16x^3y^4z^3 + 32x^2y^3z^4}{-8x^2x^3z^2}$$

Cada término del numerador se divide para el denominador, con la propiedad distributiva asi::

$$\frac{40x^4y^5z^3}{-8x^2x^3z^2} - \frac{16x^3y^4z^3}{-8x^2x^3z^2} + \frac{32x^2y^3z^4}{-8x^2x^3z^2}$$

Divida cada una de las expresiones racionales formadas y simplifique cada fracción asi:

$$-5x^2y^2 + 2xyz - 4z^2 \quad \textit{Rta.}$$

Autoevaluación 2.4

Lea y responda en el espacio entre paréntesis si es verdadera con "V" o falsa con "F".

1.-	( )	$El\ cociente\ de\ dividir\ x^2 + 3x\ entre\ x\ es: 3 + x$
2.-	( )	El valor de la expresión $\frac{4z^3-8z^2+3z-6}{2z}$ $al\ dividirla\ es: 2z^2 - 4z + \frac{3}{2} - \frac{3}{z}.$
3.-	( )	La respuesta de $(x+4)(x+5)$ es: $20 - 9x - x^2$
4.-	( )	$Al\ dividir\ x^3 - 2\ entre\ x, el\ cociente\ es: x^2 - \frac{2}{x}$
5.-	( )	Al dividir la siguiente expresión: $\left[\frac{2x^3-14x-5}{x-3}\right]; el\ \ cociente\ es: 2x^2 + 6x + 4 + \frac{7}{x-3}$
6.-	( )	$El\ producto\ x^2 + 9 + 6x, proviene\ de\ (x+3)^2$
7.-	( )	Los factores siguientes: $(a-b)(a-b), provienen\ de: a^2 - 2ab + b^2$
8.-	( )	$La\ expresión: (a+b+c)\ entre\ (b+a+c)\ es\ cero.$
9.-	( )	$Dividir\ t^2\ entre\ (t-8)\ da\ como\ cociente: t - 8$
10.-	( )	$t + 2\ es\ el\ cociente\ de\ dividir: \frac{t^2-2^2}{t-2}$

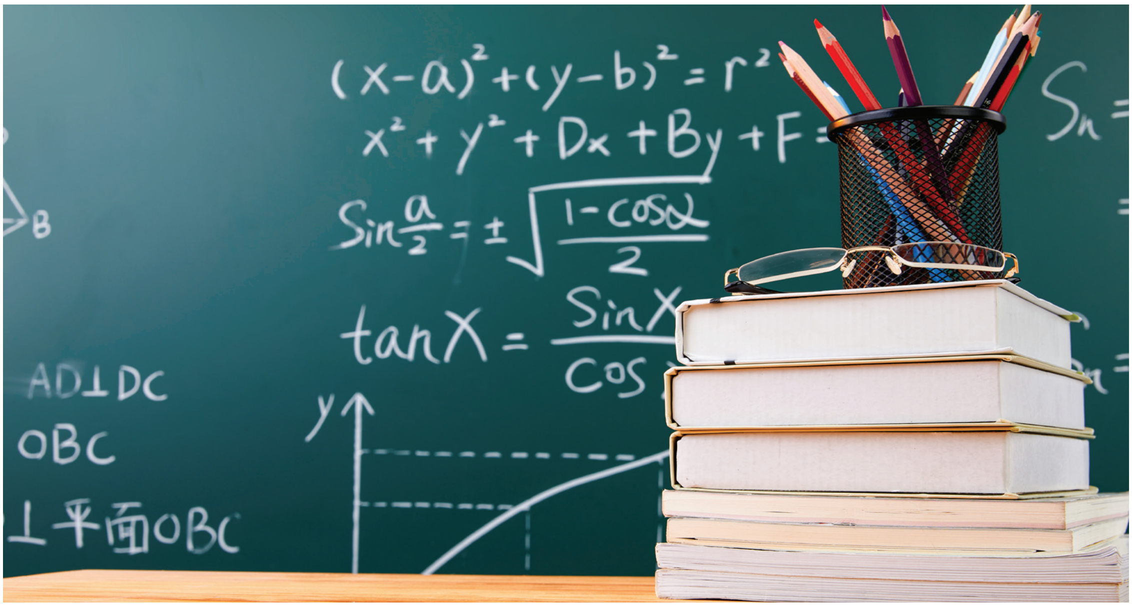
Verifique sus respuestas en el solucionario al final de la presente guía didáctica.

"Las matemáticas parecen dotar a uno de nuevo sentido"

Charles Darwin

¡¡Éxitos en la tarea que ha emprendido!!

Ir al solucionario



Resultado de aprendizaje 5

Participa efectiva y frecuentemente en grupos de trabajo, proponiendo soluciones en metodologías cuantitativas.

En esta semana usted llegará a identificar expresiones denominadas ecuaciones de carácter lineal, esto es aquellas que no presentan mas grado que el primero en la variable y llegar a resolver ejercicios estimados y considerados como ecuaciones que conllevan expresiones racionales a simplificar.

Conocerá y dominará la metodología que a partir de operaciones básicas determinará garantizando que domina la resolución de ecuaciones y encuentra el valor de la incógnita por cualquier método aprendido, añadiendo ahora la eliminación de denominadores con radicales.

La eliminación de polinomios o monomios en denominadores para simplificar aún mas expresiones de difícil resolución, como son el caso de expresiones con literales y aquellas que traen implícitas expresiones de simplificación previa por factoreo.

Finalmente, con el conocimiento de la metodología de resolución de ecuaciones con literales y aún con mas complejidad cuando conlleva expresiones racionales, con otras equivalentes que permitan mejor su resolución y aplicación futura.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje

Unidad 3 "Ecuaciones y desigualdades"

Semana 5

3. Ecuaciones y desigualdades

Una ecuación es una proposición que indica que dos expresiones son iguales. Las dos expresiones que conforman una ecuación son llamadas sus lados o miembros, y están separadas por el signo de igualdad "=".

Le recomiendo leer la sección introductoria a Ecuaciones de su Texto básico en la página 35.

3.1 Ecuaciones

Resolver una ecuación puede implicar la realización de operaciones en ella. Es preferible que al aplicar cualquiera de tales operaciones se obtenga otra ecuación con exactamente las mismas soluciones que la ecuación original. Cuando esto ocurre, se dice que las ecuaciones son equivalentes. Una ecuación además tiene incógnitas que generalmente son las últimas letras del alfabeto "x, y, z, t, w, ..." y números o las primereas letras del alfabeto que se las considerará constantes.

Existen tres operaciones que garantizan la equivalencia:

1. 1. Sumar (o restar) el mismo polinomio en ambos miembros de una ecuación.
2. Multiplicar (dividir) ambos miembros de una ecuación por la mism-constante, excepto el cero.
3. Reemplazar cualquiera de los miembros de una ecuación por una expresión igual (equivalente).

3.2 Ecuaciones lineales

Se caracterizan por tener una variable, misma que deberá estar elevada a la primera potencia. El modelo es el siguiente:

$$ax + b = 0$$

a y b son constantes y $a \neq 0$

x es la variable o incógnita.

Una ecuación lineal también se conoce como ecuación de primer grado o ecuación de grado uno, ya que la potencia más alta de la variable que aparece en la ecuación es la primera.

Ejemplo 31

Resolución de la siguiente ecuación lineal:

$$8x + 2 = 4x$$

Pasar los términos que contienen la variable a uno de los miembros en este caso a la izquierda:

$$8x - 4x = -2$$

Siempre que un término cambie de lugar en el miembro, debe cambiar a su operación complementaria si es suma a resta, si es multiplicación a división y viceberza.

$$4x = -2$$

$X=\frac{-2}{4}$

$$\boldsymbol{x = \frac{-1}{2}}, \quad \textbf{\textit{Rta.}}$$

Ejemplo 32

Resolución de la siguiente ecuación lineal:

$$2(x + 4) = 6x + 2$$

Aplicando la propiedad distibutiva

2x+8=6x+2

Pasar los términos que contienen la variable a uno de los miembros en este caso a la izquierda:

$$2x - 6x = 2 - 8$$

$$-4x = -6$$

Para tornar positivo a los miembros se puede multiplicar en ambos lados por (-1), o si se dividen términos con iguales signos la respuesta será positiva.

$$x = \frac{-6}{-4}$$

$$\boldsymbol{x = \frac{3}{2}}, \quad \textbf{\textit{Rta.}}$$

Recuerde:
Un término que cambie la posición a otro miembro deberá hacerlo con su operación complementaria.

Al ser una ecuación lineal o de grado "1", entrega una sola respuesta como solución de una ecuación lineal, fíjese en el ejemplo "5" de su Texto básico en la página 40.

3.3 Ecuaciones con literales

Las ecuaciones en las que algunas de las constantes no están especificadas pero están representadas por letras, tales como a, b, c o d, se llaman ecuaciones con literales y las letras se conocen como constantes literales o constantes arbitrarias.

Por ejemplo, en la ecuación con literales x + a = 4b, podemos considerar a a y b como constantes arbitrarias. Las fórmulas como I = Prt, que expresan una relación entre ciertas cantidades, pueden considerarse como ecuaciones con literales. Si queremos expresar una letra en particular en términos de las otras, esta letra es considerada la incógnita.

Ejemplo 33

Resolución de la siguiente ecuación lineal:

$$x(a+c)+x^2 = (x+a)^2$$

Aplicar la propiedad distributiva y el binomio al cuadrado, asi:

$$ax + ac + x^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

Transponeindo los tèrminos con "x" al primer miembro:

$$ax + x^2 - x^2 - 2ax = a^2 - ac$$

Reduzca términos semejantes y simplifique:

$$ax - 2ax = a^2 - ac$$

La variable es "x" y factorando se obtiene:

$$-ax = a(a-c)$$

Despejando la variable:

$$x = \frac{a(a-c)}{-a}$$

$$x = -(a-c)$$

$$\boldsymbol{x = c - a,} \quad \boldsymbol{Rta.}$$

Recuerde:
Es conveniente aplicar la propiedad distributiva y empezar con signo positivo la respuesta. Póngale cuidado a la ley de signos para la multiplicación.

Mas ejemplos que le ayudarán a mejorar y fominar la resolución de ecuaciones lineales, fíjese en el Ejercicio 1,1 de su Texto básico en la página 41 y 42.

3.4 Ecuaciones fraccionarias

En esta sección,ilustramos que al resolver una ecuación no lineal puede suceder que ésta se reduzca a una ecuación lineal.Empezamos con una ecuación fraccionaria, que es una ecuación en que una incógnita está en un denominador.

Ejemplo 34

Resolución de la siguiente ecuación fraccionaria lineal:

$$\frac{3x+4}{x+2}-\frac{3x-5}{x-4}=\frac{12}{x^2-2x-8}$$

Asociar y factorar los denominadores a fin de encontrar el MCD máximo común divisor asi:

$$\frac{(3x+4)}{(x+2)}-\frac{(3x-5)}{(x-4)}=\frac{12}{(x-4)(x+2)}$$

Multiplicando a los numeradores el MCD se tiene:

$$\frac{(3x+4)\boldsymbol{(x-4)(x+2)}}{(x+2)}-\frac{(3x-5)\boldsymbol{(x-4)(x+2)}}{(x-4)}=\frac{12\boldsymbol{(x-4)(x+2)}}{(x-4)(x+2)}$$

Simplifique y se eliminan denominadores:

$$(3x+4)(x-4)-(3x-5)(x+2)=12$$

Propiedad distributiva nos queda:

$$3x^2-12x+4x-16-(3x^2+6x-5x-10)=12$$

Destruyendo el paréntesis:

$$3x^2-12x+4x-16-3x^2-6x+5x+10=12$$

Se elimina el término cuadrático y transponiendo términos semejantes tenemos:

$$-12x+4x-6x+5x=12+16-10$$

Reduzca términos semejantes:

$$-9x=18$$

Despejando la variable "x"

$$\boldsymbol{x=\frac{18}{-9}=-2,\quad Rta.}$$

Recuerde:
Una cantidad negativa en el denominador es equivalente a que la fracción sea negativa.

Mas ejemplos que le ayudarán a mejorar y fominar la resolución de ecuaciones lineales, fíjese en el Ejercicio 1,1 de su Texto básico en la página 41 y 42.

3.5 Ecuaciones con radicales

Una ecuación con radicales (ecuación radical) es aquélla en la que una incóg- nita aparece en un radicando. Los dos ejemplos siguientes ilustran las técnicas empleadas para resolver tales ecuaciones.

Ejemplo 35

Resolución de la siguiente ecuación lineal con radicales:

$$\sqrt{x^2+33}-x=3$$

Para resolver esta ecuación radical, elevamos ambos miembros a la misma potencia para eliminar el radical. Esta operación *no* garantiza la equivalencia, de modo que debemos verificar las "soluciones" resultantes. Empezamos aislando el radical en un lado. Después elevamos al cuadrado ambos lados y despejamos utilizando las técnicas comunes. Así,

$$\sqrt{x^2+33}=x+3$$

$$\left(\sqrt{x^2+33}^{\,2}\right)=(x+3)^2$$

$$x^2+33=x^2+6x+9$$

Se eliminan los términos cuadráticos:

$$-6x=9-33$$

Reduzca términos semejantes:

$$-6x=-24$$

$$\boldsymbol{x=\frac{-24}{-6}=4,\quad Rta.}$$

Mas ejemplos que le ayudarán a mejorar y fominar la resolución de ecuaciones lineales, fíjese en el Ejercicio 1,2 de su Texto básico en la página 47.

Se ha concluido el estudio de esta primera unidad, siempre revise el contenido hasta que domine el tema en particular y detalles que necesite mejorar acorde a su nivel de conocimientos.

A continuación, le invito a desarrollar la siguiente autoevaluación, cuyo objetivo es conocer cuánto usted ha comprendido del tema, además podrá revisar en la sección del solucionario, la retroalimentación de cada pregunta.

Autoevaluación 3.5

Lea y responda en el espacio entre paréntesis si es verdadera con "V" o falsa con "F".

1.-	( )	La ecuación $2(x+4)=7x+2$, tiene por respuesta: $x=\frac{6}{5}$
2.-	( )	El valor de "2", es la raíz o solución de la ecuación: $\frac{7x+3}{2}-\frac{9x-8}{4}=6.$
3.-	( )	La ecuación: $S=P+Pqr$, el valor de "P" que satisface sería: P= $\frac{S}{1+qr}$
4.-	( )	La ecuación: $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=7$, tiene por respuesta: $x=\frac{42}{5}$
5.-	( )	Dada la ecuación: $\frac{3a+4}{a+2}-\frac{3a-5}{a-4}=\frac{12}{a^2-2a-8}$, tiene por solución: $a=-2$
6.-	( )	Si la ecuación es: $\frac{1}{x}+\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$, el valor que satisface es $x=1$
7.-	( )	La ecuación: $\sqrt{5x-6}-16=0$, con radicales tiene por solución $x=2$.
8.-	( )	Al resolver la ecuación: $\frac{2}{x+q}=\frac{x}{q+x}$, se tiene como respuesta: $x=2$
9.-	( )	La ecuación: $(a+1)^3=\frac{1}{27}$, tiene $a=-\frac{2}{3}$, como respuesta.
10.-	( )	La ecuación: $\frac{1}{1+x}+\frac{2}{2+x}-\frac{3}{3+x}=1$, tiene de respuesta: $x=\frac{1}{3}$

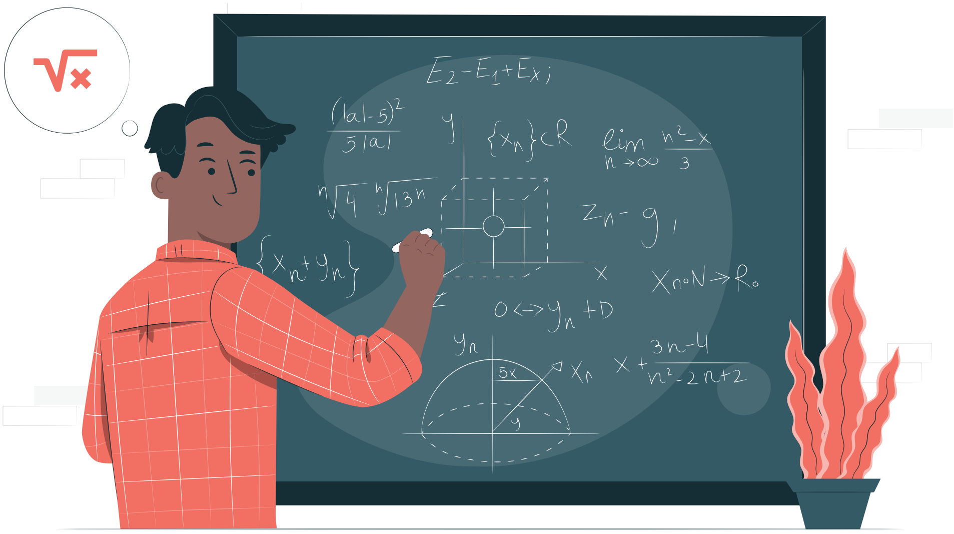
Verifique sus respuestas en el solucionario al final de la presente guía didáctica.

"La esencia de las matemáticas no es hacer las cosas simples complicadas, sino hacer las cosas complicadas simples"

S. Gudder

¡¡Éxitos en la tarea que ha emprendido!!

Ir al solucionario



Resultado de aprendizaje 6

Participa efectiva y frecuentemente en grupos de trabajo, proponiendo soluciones apoyadas en metodologías cuantitativas.

En esta semana usted llegará a identificar expresiones denominadas ecuaciones cuadráticas o de segundo grado, esto es aquellas que presentan un grado dos en la variable y llegar a resolver ejercicios estimados y considerados que conllevan expresiones racionales a simplificar.

Conocerá y dominará la metodología que a partir de operaciones básicas determinará garantizando que domina la resolución de ecuaciones y encuentra el valor de la incógnita por factoreo o la aplicación de la fórmula general o cualquier método aprendido, añadiendo ahora la eliminación de denominadores con radicales.

La eliminación de polinomios o monomios en denominadores para simplificar aún mas expresiones de difícil resolución, como son el caso de expresiones con literales y aquellas que traen implícitas expresiones de simplificación previa por factoreo.

Finalmente, con el conocimiento de la metodología de resolución de ecuaciones de segundo grado con literales y aún con mas complejidad cuando conlleva expresiones racionales, con otras equivalentes que permitan mejor su resolución especificando que éstas ahora son dos de las cuales usted reconocerá las soluciones reales y de aplicación futura.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje

Semana 6

3.6 Ecuaciones cuadráticas

Una ecuación cuadrática también se conoce como ecuación de segundo grado o ecuación de grado dos, ya que la potencia más grande que aparece en ella es la segunda, una ecuación cuadrática puede tener dos raíces o respuestas. Además una ecuación cuadrática responde a la forma:

$$ax^2 + \mathrm{bx} + \mathrm{c} = 0$$

Donde "x" es la variable "a, b y c" son constantes y a es diferente de cero, son ejemplos:

$$x^2 = 2$$

$$5 - x = x^2$$

$$a = (x + 1)^2$$

3.6.1 Solución por factoreo

Simplifique de ser posible,

Factore los términos de ser posible,

Despeje la variable.

Este método es útil cuando el ejercicio es factorable, de lo contrario el segundo método lo resolverá.

Ejemplo 36

Resolución de la siguiente ecuación cuadrática:

$$x^2 + x - 12 = 0$$

Es un trimomio que se deja factorar asi:

$$(x + 4)(x - 3) = 0$$

Cada paréntesis se iguala a cero:

$$x + 4 = 0, \qquad x - 3 = 0$$

$$\boldsymbol{x_1 = -4, \quad x_2 = 3, \quad Rta.}$$

Ejemplo 37

Resolución de la siguiente ecuación cuadrática:

$$x^2 = 3$$

Despejar la variable para que sea una diferencia de cuadrados y factorar asi:

$$x^2 - 3 = 0$$

$$(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$$

Igualando cada paréntesis a cero tenemos:

$$x - \sqrt{3} = 0, \qquad x + \sqrt{3} = 0$$

$$\boldsymbol{x_1 = -1,73205, \quad x_2 = 1.73205, \quad Rta.}$$

Recuerde:
Que siempre que se extrae una raíz cuadrada se tiene los dos signos en la respuesta. Una positiva y otra negativa.

Este método y ejemplos de aplicación lo puede encontrar en el Ejercicio 1.3 de su Texto básico en la página 53, los ejemplos del 1 al 30.

3.6.2 Solución por la Fórmula General

Es evidente que al tratar de resolver por factoreo la siguiente ecuación es imposible $0.7x^2 - 22x - 825 = 0$.

Sin embargo, existe una fórmula llamada *fórmula cuadrática* [5] que da las raíces de cualquier ecuación cuadrática, esta fórumula es:

$$\mathbf{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Donde a, b y c, son los coeficientes de la ecuación cradrática armada de la siguiente forma:

$$ax^2 + \mathrm{bx} + \mathrm{c} = 0$$

Ejemplo 38

Resolución de la siguiente ecuación cuadrática:

$$4x^2 - 17x + 15 = 0$$

Identifique los respectivos coefientes para usar en la fórmula:

$$a = 4, \qquad b = -17, \qquad c = 15$$

Con estos valores entramos en la Fórmula General:

$$\mathbf{x} = \frac{-\mathbf{b} \pm \sqrt{\mathbf{b}^2 - 4\mathbf{ac}}}{2\mathbf{a}}$$

$$\mathbf{x} = \frac{-(-17) \pm \sqrt{-17^2 - 4 * 4 * 15}}{2 * 4}$$

Resolviendo la operaciones indicadas:

$$\mathbf{x} = \frac{(17) \pm \sqrt{49}}{8} = \frac{17 \pm 7}{8}$$

Separando ambas respuestas:

$$x_1 = \frac{17+7}{8} = \frac{24}{8} = 3, \quad \boldsymbol{Rta.}$$

$$x_2 = \frac{17-7}{8} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}, \quad \boldsymbol{Rta.}$$

Este método y ejemplos de aplicación lo puede encontrar en el Ejercicio 1.3 de su Texto básico en la página 53, los ejemplos del 31 al 44.

3.7 Ecuaciones con radicales

En general las ecuaciones con radicales requieren eliminar el radical elevando al mismo exponente del índice del radical, esencialmente es poder lograr la simplificación del radical, tambien se puede emplear el principio de substitución como modo para no trabajar con radicales.

En el siguiente ejemplo podrá apreciar esta técnica.

Ejemplo 39

Resolución de la siguiente ecuación con radicales:

$$\sqrt{y-3} = \sqrt{y} - 3$$

Elevando al cuadrado ambos miembros y conformando un binomio al cuadrado asi:

$$\left(\sqrt{y-3}\right)^2 = \left(\sqrt{y}-3\right)^2$$

Simplifique el radical y plantee el binomio al cuadrado:

$$y-3 = y-6\sqrt{y}+9$$

Transponga la variable a la izquierda, así:

$$y-y+6\sqrt{y}=9$$

Reduciendo términos semejantes y simplificando:

$$6\sqrt{y}=9$$

$$2\sqrt{y}=3$$

Eleve al cuadrado ambos miembros, asi:

$$\left(2\sqrt{y}\right)^2 = 3^2$$

$$4y=9$$

Separando ambas respuestas:

$$y=\frac{9}{4},\quad Rta.$$

Esta metodología se puede utilizar con cualquier grado de ecuación..

3.8 Ecuaciones fraccionarias

Este tipo de ecuaciones poseen denominadores que pueden ser factorables y en el proceso eliminarlas para constituir una forma simple cuadrática que permita su resolución por factoreo o por fórmula general. El siguiente ejercicio detalla el proceso de mejor manera

$$\frac{3}{x-4}+\frac{x-3}{x}=2$$

A ese ejercicio se deberá multiplicar el MCD que es $x(x-4)$, a los numeradores de las fracciones, de la siguiente manera:

$$\frac{3x(x-4)}{(x-4)}+\frac{(x-3)x(x-4)}{x}=2x(x-4)$$

$$\frac{3x(x-4)}{(x-4)}+\frac{(x-3)x(x-4)}{x}=2x(x-4)$$

Al simplificar las fracciones obtenemos una ecuación libre de fracciones:

$$3x+(x-3)(x-4)=2x^2-8x$$

Eliminando los paréntesis por multiplicar o por la propiedad distributiva tenemos:

$$3x+x^2-4x-3x+12=2x^2-8x$$

Transponiendo y reduciendo términos semejantes da:

$$-x^2+4x=-12$$

Obtengamos el modelo cuadrático, cambiamos el signo e igualamos a cero, así:

$$x^2-4x-12=0$$

Esta forma permite factorar y resolver la ecuación:

$$(x-6)(x+2)=0$$

Igualando a cero cada Factor obteremos:

$$x-6=0, \qquad x+2=0$$

$$\boldsymbol{x_1=6}, \quad \boldsymbol{Rta.}$$

$$\boldsymbol{x_2=-2}, \quad \boldsymbol{Rta.}$$

Recuerde:

Que el objetivo primordial en este tipo de ecuaciones es importante eliminar los denominadores por cualquier método.

Ejemplo 40

Resolución de la siguiente ecuación con fracciones:

$$\frac{1}{(x-2)^2}-\frac{12}{x-2}+35=0$$

Multiplicando a cada numerador por el MCD que sería $(x-2)^2$ y da:

$$\frac{(x-2)^2}{(x-2)^2}-\frac{12(x-2)^2}{x-2}+35(x-2)^2=0$$

Simplifique cada fracción y se eliminan los denominadores asi:

$1 - 12(x-2) + 35(x-2)^2 = 0$

$$1 - 12x + 24 + 35(x^2 - 4x + 4) = 0$$

Aplique propiedad distributiva y simplificando:

$$1 - 12x + 24 + 35x^2 - 140x + 140 = 0$$

Ordene y reduzca términos semejantes asi:

$$35x^2 - 152x + 165 = 0$$

En esta condición aplico la fórmula general:

$$\mathbf{x} = \frac{-\mathbf{b} \pm \sqrt{\mathbf{b}^2 - 4\mathbf{ac}}}{\mathbf{2a}}$$

$$\mathrm{x} = \frac{152 \pm \sqrt{-152^2 - 4 * 35 * 165}}{2 * 35}$$

$$\mathrm{x} = \frac{152 \pm \sqrt{23.104 - 23.100}}{70}$$

$$\mathrm{x} = \frac{152 \pm 2}{70}$$

Separando ambas respuestas y simplificando:

$$\boldsymbol{x_1 = \frac{154}{70} = 2,2, \quad Rta.}$$

$$\boldsymbol{x_1 = \frac{150}{70} = 2,1, \quad Rta}$$

Recuerde:

El MCD, siempre será el de mayor exponente, y eliminar los denominadores.

Mas ejemplos para mejorar y dominar la resolución de ecuaciones fraccionarias las puede encontrar en el Ejercicio 1,3 de su Texto básico en la página 54, los ejemplos del 55 al 65 son especialmente recomendados.

Se ha concluido el estudio de esta unidad, siempre le recomiendo revisar lo recomendado hasta que domine el tema en particular y detalles que usted confirma necesita mejorar y así conocer su nivel de conocimientos.

Autoevaluación 3.6

Lea y responda en el espacio entre paréntesis si es verdadera con "V" o falsa con "F".

1.-	( )	*Al resolver esta ecuación:* $\left(\sqrt{y-3}\right)^2 = \left(\sqrt{y}-3\right)^2$ se tiene que: $y = \frac{9}{4}$
2.-	( )	*Las raices de la ecuación:* $\frac{4x^2-16}{4} = 1,$ *son* $x_1 = 2$ *y* $x_2 = -2.$
3.-	( )	La ecuación cuadrática $x^2 = \frac{1}{2}$, *sus raices son:* $\begin{matrix} x_1=0{,}5 \\ x_2=-0{,}5 \end{matrix}$
4.-	( )	*Lo ecuación:* $y^2 + y - 12$, *tiene la solución:* $\begin{matrix} y_1 = 3 \\ y_2 = -4 \end{matrix}$
5.-	( )	Puede ser $x_1 = 0$, *una de las raíces de la ecuación:* $x(x+2) = 0$
6.-	( )	*Las raices:* $\begin{matrix} x_1 = -2 \\ x_2 = -5 \end{matrix}$, *provienen de la ecuación:* $x^2 + 7x + 10 = 0$
7.-	( )	Al resolver la ecuación: $6w^2 - 5w = 0$, *las raices son:* $\begin{matrix} w_1=0 \\ w_2=\frac{5}{6} \end{matrix}$
8.-	( )	*La ecuación:* $(a+2)(a-1) = 0$, *tiene por solución:* $\begin{matrix} a_1 = -2 \\ a_2 = 1 \end{matrix}$
9.-	( )	*La ecuación* $x^2 = 3$, *tiene por solución:* $\begin{matrix} x_1 = \sqrt{3} \\ x_2 = -\sqrt{3} \end{matrix}$,
10.-	( )	Por la fórmula general la ecuación: $\frac{1}{x^6} + \frac{9}{x^2} + 8 = 0,$ *arroja:* $\begin{matrix} x_1=-1 \\ x_2=-\frac{1}{2} \end{matrix}$

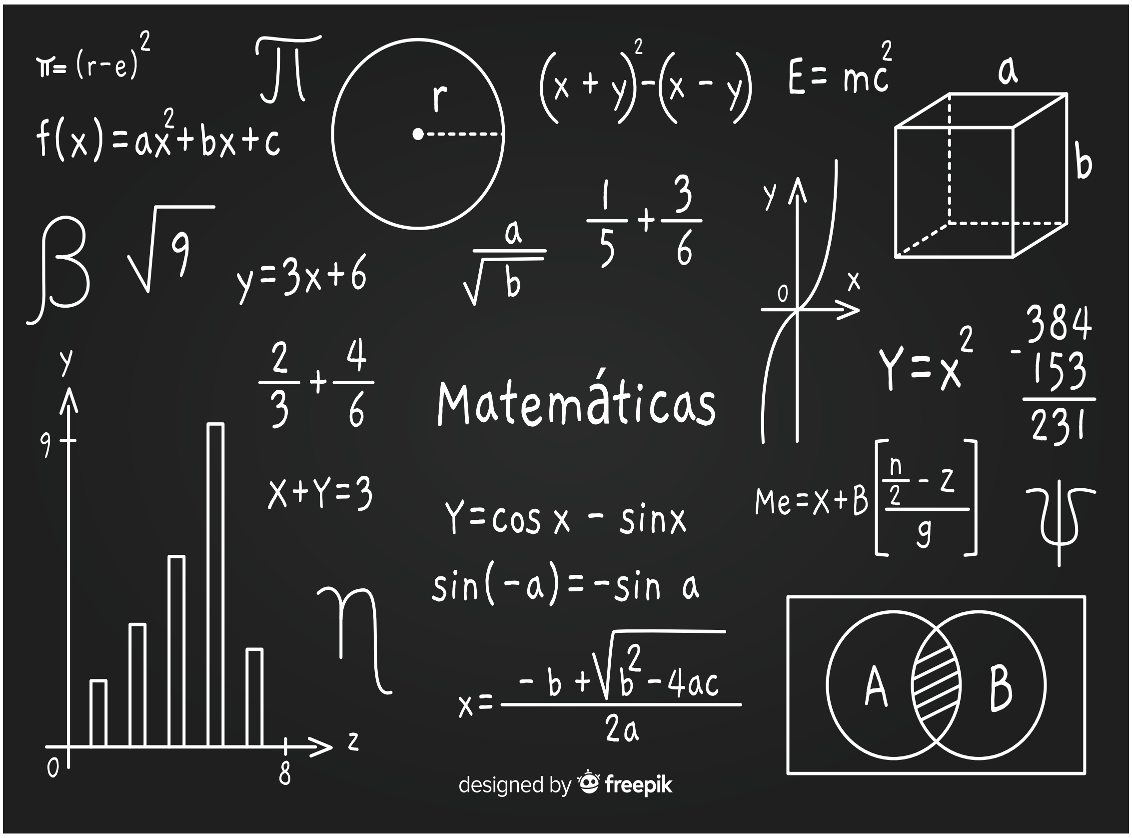
Verifique sus respuestas en el solucionario al final de la presente guía didáctica.

"Si Los números perfectos, como los hombres perfectos, son muy extraños"

Descartes

¡¡Éxitos en la tarea que ha emprendido!!

Ir al solucionario



Resultado de aprendizaje 7

Participa efectiva y frecuentemente en grupos de trabajo, proponiendo soluciones apoyadas en metodologías cuantitativas.

Usted llegará a identificar expresiones denominadas desigualdades lineales, esto es aquellas que presentan un grado de comparación de mayor o menor en la variable y llegar a resolver ejercicios estimados y considerados que conllevan expresiones racionales a simplificar.

Conocerá y dominará la metodología a partir de las propiedades y aplicar operaciones básicas garantizando que domina la resolución de desigualdades y encuentra el rango de la incógnita.

Finalmente, con el conocimiento de la metodología de resolución de desigualdades al expresar las mismas de una manera gráfica y en intervalo.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje

Unidad 4. Desigualdades, y ecuaciones

Semana 7

Unidad 4 "Desigualdades y ecuaciones"

1 Desigualdades y ecuaciones lineales

Suponga que *a* y *b* son dos puntos sobre la recta de los números reales. Entonces, *a* y *b* coinciden, y además se pueden dar las siguientes posiciones que "*a*" e encuentra a la izquierda de "*b*", o "*a*" se encuentra a la derecha de "*b*". (vease la fig. 4.1).

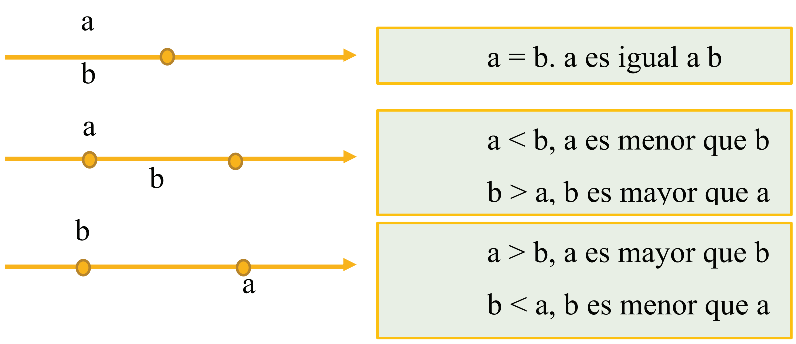


Figura 4,1. Ubicación relativa de dos puntos en la recta numérica

Elaborado por:Espinosa. K, (2022), Guía Didáctica Matemática, Quito: ISTHCPP

Si *a* y *b* coinciden entonces *a* = *b*. Si *a* se encuentra a la izquierda de *b*, decimos que *a* es menor que *b* y escribimos a < b, en donde el *símbolo de desigualdad* " < " se lee "es menor que". Por otra parte, si *a* se encuentra a la derecha de *b*, decimos que *a* es mayor que *b* y escribimos a > b. Los enunciados a > b y b < a son equivalentes.

Otro símbolo de desigualdad, "≤", se lee "es menor o igual a" y se define como: a ≤ b si y sólo si a < b o a = b. De manera semejante, el símbolo "≥" está definido como: a ≥ b si y sólo si a > b o a = b. En este caso decimos que *a* es mayor o igual a *b*.

Usaremos las palabras *números reales* y *puntos* de manera indistinta, ya que existe una correspondencia uno a uno entre los números reales y los puntos que están sobre una recta. Así, podemos hablar de los puntos -5, -2, 0 ,7 y 9, y escribir 7 < 9, -2 > -5, 7 ≤ 7 y 7 ≥ 0 (véase la fig. 4.2). Claramente, si a > 0, entonces *a* es positivo; si a < 0, entonces *a* es negativo.

Figura 4,2. Puntos en la recta numérica

Elaborado por:Espinosa. K, (2022), Guía Didáctica Matemática, Quito: ISTHCPP

Una *desigualdad* es un enunciado que establece que un número es menor que otro.

Reglas para las desigualdades

1. Si un mismo número se suma o resta en ambos lados de una desigualdad, la desigualdad resultante tendrá el mismo sentido que la original. En forma simbólica, si a < b, entonces a + c < b + c y a - c < b - c.

Por ejemplo, 7 < 10, de modo que 7 + 3 < 10 + 3.

2. Si ambos lados de una desigualdad se multiplican o dividen por el mismo número positivo, la desigualdad resultante tendrá el mismo sentido que la original. En forma simbólica,

si $a < b$ y $c > 0$, entonces $ac < bc$ y $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$

Por ejemplo, 3 < 7 y 2 > 0, de modo que 3(2) < 7(2) y $\frac{3}{2} < \frac{7}{2}$

3. Si ambos lados de una desigualdad se multiplican o dividen por el mismo número *negativo*, entonces la desigualdad resultante tendrá el sentido *contrario* de la original. En forma simbólica,

si $a < b$ y $c > 0$, entonces $a(-c) > b(-c)$ y $\frac{a}{-c} > \frac{b}{-c}$

Por ejemplo, $4 < 7$ pero $4(-2) > 7(-2)$ y $\frac{4}{-2} < \frac{7}{-2}$

4. Cualquier lado de una desigualdad puede reemplazarse por una expresión equivalente a ella. En forma simbólica,

si $a < b$ y $a = c$, entonces $c < b$.

Por ejemplo, si $x < 2$ y $x = y + 4$, entonces $y + 4 < 2$.

5. Si los lados de una desigualdad son ambos positivos o negativos, entonces sus recíprocos [1] respectivos estarán relacionados por un símbolo de desigualdad con sentido *contrario* a la desigualdad original.

Por ejemplo, $2 < 4$, pero $\frac{1}{2} > \frac{1}{4}$

6. Si ambos lados de una desigualdad son positivos y elevamos cada lado a la misma potencia positiva, entonces la desigualdad resultante tendrá el mismo sentido que la original.

Por tanto, si $0 < a < b$ y $n > 0$, entonces $a^n < b^n$ y $\sqrt{a} < \sqrt{b}$,

en donde suponemos que *n* es un entero positivo en la última desigualdad.

Por ejemplo, $4 < 9$ de modo que $4^2 < 9^2$ y $\sqrt{4} < \sqrt{9}$

El resultado de aplicar las reglas 1 a 4 a una desigualdad se conoce como *desigualdad equivalente.* Ésta es una desigualdad cuya solución es exactamente la misma que la de la original. Aplicaremos estas reglas a una *desigualdad lineal.*

Una desigualdad lineal en la variable "x" es aquella que puede escribirse de la forma:

$ax + b < 0$, Donde a y b son constantes y $a \neq 0$.

El ejercicio siguiente, le permite comprender el proceso de resolución y la aplicación a otros ejercicios con empleo de todas las propiedades. Fíjese en lo siguiente:

$$2(x - 3) < 4$$

Aplique la propiedad distributiva:

$$2x - 6 < 4$$

Transponiendo los términos:

$$2x < 4 + 6$$

$$2x < 10$$

$$x < \frac{10}{2},$$

$x < 5$, ***Rta.*** Solución numérica

La respuesta quiere decir que son "Todos los números menores a "5", pero no incluye al "5"", A esta respuesta se la denomina numérica, pero el ejemplo requiere de la ayuda de una respuesta gráfica y de intervalo.

Solución gráfica

Fíjese que el círculo esta vacio, que indica no incluye el punto "5".

Solución en intervalo

$(-\infty\ ;\ 5)$

Al no incluir el punto cinco la respuesta de intervalo adopta el paréntesis de igual manera para el infinito.

Recuerde:
Que las desigualdades arrojan tres respuestas, una numérica, otra gráfica y finalmente una en intervalo.

Utilice la figura circular rellena o pintada y corchetes cuando se utilice los signos $\leq, \geq$.

Utilice la figura circular vacía o sin pintar y paréntesis cuando se utilice los signos $<, >$.

En este segundo ejemplo encontrará un caso que involucra la igualdad.

$$2(x-1) \leq 4(x-2)$$

Aplique la propiedad distributiva:

$$2x - 2 \leq 4x - 8$$

Transponiendo los términos:

$$-2x \leq -6$$

Al multiplicar a ambos miembros por "-1", para hacerlos positivos, se cambia la direcci de la desigualdad, así:

$$2x \geq 6$$

$$x \geq \frac{6}{2},$$

$x \geq 3$, ***Rta.*** Solución numérica

Son todos los números igual a 3 y mayores que 3, (4, 5, 6, ...)

Solución gráfica

Fíjese que el círculo esta lleno, que indica incluye el punto “3”.

Solución en intervalo

$[3; \infty)$

Al incluir el punto tres la respuesta de intervalo adopta el corchete, mas no el infinito que conserva el paréntesis, pues no se puede incluir al infinito.

Recuerde:
Que las desigualdades arrojan tres respuestas, una numérica, otra gráfica y finalmente una en

Utilice la figura circular rellena o pintada y corchetes cuando se utilice los signos $\leq, \geq$.

Ejemplo 41

Resolución de la siguiente desigualdad con fracciones:

$$\frac{9y+1}{4} \leq 2y - 1$$

Multiplicando a cada numerador por el MCD que sería “4” da:

$$\frac{4(9y+1)}{4} \leq 4 * 2y - 4 * 1$$

Simplifique cada fracción y se eliminan los denominadores asi:

$$9y + 1 \leq 8y - 4$$

Transponiendo y simplificando:

$y \leq -5,\quad Rta.$ **Solución numérica**

Son todos los números igual a -5 y menores que -5, (-5, -6, -7, ……).

Solución gráfica

Fíjese que el círculo esta lleno, que indica que incluye el punto “-5”.

Solución en intervalo

$(-\infty\,;\ -5]$

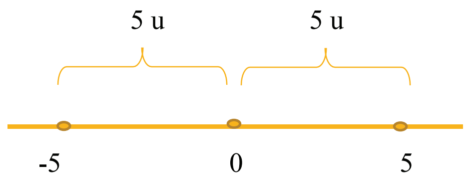
Al incluir el punto “menos cinco” la respuesta de intervalo adopta el corchete y para el infinito se conserva el paréntesis

En el Ejercicio 2.2 de las páginas 74 y 75 de su Texto básico, tiene varios ejemplos a dominar del tema Póngale atención al ejemplo 35 sobre utilidades que es interesante..

4.1 Ecuaciones con valor absoluto

En la recta de los números reales, a la distancia desde el cero hasta un número "x" se le llama el valor absoluto de "x", el cual se denota por $|x|$. Nótese que la distancia no tiene un signo ni un sentido, nos da igual medir los metros por ejemplo de izquierda a derecha o de detecha a izquierda.

Por ejemplo, $|5| = 5, y\ de\ |-5| = 5$. La distancia desde el cero hasta el cinco es 5 unidades e igual desde el cero hasta el -5 es también 5 unidades. (véase la figura 4,1). Como puede obserbar "x" nunca puede ser negativo. y el balor absoluto de cero es cero. $|0| = 0$.



$$|5| = |-5| = 5$$

Figura 4.1

Por definición El valor absoluto de un número real "x", escrito como: $|x|$, es:

$$|\mathbf{x}| = \begin{cases} \mathbf{x, si\ x \geq 0.} \\ \mathbf{-x, si\ x < 0,} \end{cases}$$

Observe y analice los siguientes ejemplos:

$$|3| = 3$$
$$-|2| = -2$$

$$|-8| = -(-8)$$
$$-2|-2 = -2|$$

Ejemplo 42

Resolución de la siguiente ecuación con valor absoluto:

$$|x-3| = 2$$

x-3, está a 2 unidades de distancia, entonces las dos condiciones son:

$$x-3 = 2, \quad o \quad x-3 = -2$$

Resolviendo las dos ecuaciones se obtiene:

$$\boldsymbol{x = 5, \qquad x = 1 \qquad Rtas.}$$

Recuerde:
Que el valor absoluto nunca es

Se le sugiere analizar del Ejercicio de repaso, los ejemplos 11 y 12.

4.2 Desigualdades con valor absoluto

La tabla siguiente le ayudará a plantear desigualdades con valor absoluto.

Tabla 4.2

Desigualdad ($d > 0$)	Solución
$\|x\| < d$	$-d < x < d$
$\|x\| \leq d$	$-d \leq x \leq d$
$\|x\| > d$	$x < -d, o\ x > d$
$\|x\| \geq d$	$x \leq -d, o\ x \geq d$

Ejemplo 43

Resolución de la siguiente desigualdad con valor absoluto:

$$|x-2| < 4$$

Adapte a la solución de la tabla 4.2 así:

$$-4 < x - 2 < 4$$

$$-4 + 2 < x < 4 + 2$$

Sumando el 2 en ambos miembros:

$-2 < x < 6,$ ***Rta*. Solución numérica**

Solución gráfica

-2 6

Fíjese que el círculo no esta lleno, que indica que no incluyen a los puntos.

Solución en intervalo

$(-2;\ 6)$

La respuesta de intervalo en paréntesis porque los puntos no están incluidos

Propiedades del valor absoluto	
1	$\lvert ab\rvert = \lvert a\rvert . \lvert b\rvert$
2	$\left\lvert\frac{a}{b}\right\rvert = \frac{\lvert a\rvert}{\lvert b\rvert}$
3	$\lvert a - b\rvert = \lvert b - a\rvert$
4	$-\lvert a\rvert \leq a \leq \lvert a\rvert$

Ejemplo 44

Aplicación de las propiedades en los siguienes ejemplos con valor absoluto:

$$a). - |(-7 * 3| = |-7| * |3|$$

b). - $|4 - 2| = |2 - 4| = 2$

$$\boldsymbol{c. - |7 - x| = |x - 7|}$$

$$\boldsymbol{d. - \left|\frac{-7}{3}\right| = \frac{|-7|}{|3|} = \frac{7}{3}}$$

$$\boldsymbol{e. - \left|\frac{-7}{-3}\right| = \frac{|-7|}{|-3|} = \frac{7}{3}}$$

$$\boldsymbol{f. - \left|\frac{x-3}{-5}\right| = \frac{|x-3|}{|-5|} = \frac{|x-3|}{5}}$$

$$\boldsymbol{g. - -|2| \leq 2 \leq |2|}$$

Ejemplo 45

Resolución del ejercicio siguiente aplicando propiedade del valor absoluto:

$$\left|\frac{x}{4}\right| > 2$$

Aplique la propiedad d) del valor absoluto, así:

$$\frac{|x|}{|4|} > 2$$

$$\frac{x}{4} > 2$$

$x > 8$, ***Rta.* Solución numérica**

Son todos los números mayores que no incluyen al “8” hasta el infinito

Solución gráfica

8

Fíjese que el círculo no esta lleno, que indica que no incluyen al punto.

Solución en intervalo

$(8;\ +\infty)$

El intervalo en paréntesis porque el punto no está incluido ni el infinito.

4.3 Aplicaciones de ecuaciones y desigualdades

Cuando las palabras o cierta cituación es expresada en símbolos matemáticos y estos a su vez se expresan mediante una ecuación o una desigualdad, se está frente a lo que se denomina ***modelado matemático***.

Es importante leer el problema o situación hasta comprender con claridad la información y qué es lo que se solicita encontrar. Después debe seleccionar una letra para representar la variable o incógnita o la cantidad desconocida que se quiere determinar.

Utilice las relaciones e información que el problema proporciona, y forme una ecuación o desigualdad. Por último, resuelva la ecuación y vea si su solución responde a lo que se pregunta. Algunas veces la solución de la *ecuación* es matemática pero no lógica.

Algunas relaciones básicas para resolver problemas de administración son las siguientes:

$$\boldsymbol{costo\ total\ =\ costo\ variable\ +\ costo\ fijo}$$

$$\boldsymbol{ingresototal = (precioporunidad)(n\acute{u}merodeunidadesvendidas)}$$

$$\boldsymbol{utilidad = \ ingreso\ -\ costo\ total}$$

Los símbolos de desigualdad $>, <, \geq, \leq$, y se utilizan para representar una desigualdad, la cual es un enunciado en el que un número puede ser mayor o menor que otro, o mayor igual y menor igual a otro, por ejemplo. Tres operaciones básicas que cuando se aplican a una desigualdad, garantizan una desigualdad equivalente son:

1. Sumar (o restar) el mismo número a (o de) ambos lados.
2. Multiplicar (o dividir) ambos lados por el mismo número positivo.
3. Multiplicar (o dividir) ambos lados por el mismo número negativo e invertir el sentido de la desigualdad.
4. Multiplicar (o dividir) ambos lados por el mismo número negativo e invertir el sentido de la desigualdad.

Estas operaciones son útiles para resolver una desigualdad lineal (ésta es una que pueda escribirse en la forma $\boldsymbol{ax + b < 0}$, o $\boldsymbol{ax + b \leq 0}$, donde $a \neq 0$

Una definición algebraica de valor absoluto es:

$\boldsymbol{|x| = x, si\ x \geq 0}$, y $\boldsymbol{|x| = -x, si\ x < 0}$

Ejemplo 46

Resolución de una desigualdad aplicando propiedade del valor absoluto:

$$|x + 5| \geq 8$$

X+5, debe estar a 8 unidades entonces plantee dos condiciones, así:

$x + 5 \leq -8, \qquad x + 5 \geq 8$

Entonces se obtiene dos intervalos así:

$$x \leq -13, \qquad x \geq 3$$

$$(-\infty; -13], \qquad [3; +\infty)$$

Entonces una, las respuestas de la siguiente manera>

$$(-\infty; -13] \cup [3; +\infty)$$

Donde la “U” es el símbolo que une las respuestas y que significa unión.

$(-\infty; \mathbf{-13}] \cup [\mathbf{3}; +\infty)$ Solución numérica

Son todos los números menores a – 13 incluido, hasta el infinito y mayores a 3 incluido, hasta el infinito

Solución gráfica

Fíjese que el círculo esta lleno, que indica que incluyen al punto.

Solución en intervalo

$(-\infty; \mathbf{-13}] \cup [\mathbf{3}; +\infty)$

El intervalo incluye por lo tanto corchete y paréntesis por el infinito.

Se le sugiere analizar del Ejercicio 2.4 de su Texto básico, los ejemplos del 15 al 36 son muy didácticos.

Se ha concluido el estudio de esta unidad, siempre le recomiendo revisar lo recomendado hasta que domine el tema en particular y detalles que usted confirma necesita mejorar y así conocer su nivel de conocimientos.

A continuación, le invito a desarrollar la siguiente autoevaluación, cuyo objetivo es conocer cuánto usted ha comprendido del tema, además podrá revisar en la sección del solucionario, la retroalimentación de cada pregunta.

Autoevaluación 4.7

Lea y responda en el espacio entre paréntesis si es verdadera con "V" o falsa con "F".

1.-	( )	La desigualdad: $3-2x \leq 6, tiene\ por\ respuesta: x \geq -\frac{3}{2}$
2.-	( )	La desigualdad: $3-2x \leq 6, se\ cumple\ en\ el\ intervalo: [-\frac{3}{2}; +\infty)$
3.-	( )	Esta desigualdad: $2(x-4)-3 > 2x-1$ no se va a cumplir nunca.
4.-	( )	$Lo\ desigualdad\ -\frac{2}{3}x > 6, se\ cumple\ en\ el\ intervalo\ (-\infty; 9)$
5.-	( )	Aplicando las propiedades del valor absoluto a la expresión $\lvert x-4\rvert = -3$, no tendría respuesta.
6.-	( )	$Es\ equivalente: \frac{\lvert x\rvert}{\lvert 2\rvert}\ a: \left\lvert\frac{x}{2}\right\rvert$
7.-	( )	Si modelamos matemáticamente el enunciado "x está a menos 3 unidades del 5", se puede escribir: $\lvert x-5\rvert < 3$
8.-	( )	Es correcto escribir $x < 3\ \ y. x > -3,\ \ por:\ \lvert x\rvert < 3$
9.-	( )	$El\ siguiente\ enunciado: \lvert x-1\rvert, es\ igual\ a: \lvert 1-x\rvert$
10.-	( )	La expresión: $\lvert x\rvert < 4, no\ tiene\ solución.$

Verifique sus respuestas en el solucionario al final de la presente guía didáctica.

"Para aquellos que no conocen las matemáticas, es difícil sentir la belleza de la naturaleza.
Si quieres apreciarla, es necesario aprender el lenguaje en el que habla".
Richard Feynman

¡¡Éxitos en la tarea que ha emprendido!!

Ir al solucionario

Resultado de aprendizaje 8

Puede resolver sistemas de ecuaciones aplicadas a la oferta y demanda administrativa de bienes y servicios.

Usted llegará a identificar expresiones denominadas ecuaciones enfocadas a la resolución simultánea de varias de ellas o denominadas sistemas que para este caso serán lineales, esto es aquellas que presentan un grado de comparación de mayor o menor en la variable y llegar a resolver ejercicios estimados y considerados que conllevan expresiones racionales a simplificar.

Conocerá y dominará la metodología a partir de las propiedades como la suma y resta, la sustitución y la igualación de ecuaciones para encontrar el valor de las variables en sistemas de hasta tres incógnitas, usted podrá percatarse que domina y aplica las operaciones básicas y encuentra los valores simultáneamente de las incógnitas.

Finalmente, con el conocimiento de la metodología de resolución de cualquier sistema de ecuaciones podrá plasmarlas de manera gráfica y entenderá la aplicación de las mismas a situaciones reales de la profesión.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje

Semana 8

4.4 Introducción a los sistemas de ecuaciones lineales

Un sistema de ecuaciones se considera como tal, cuando presenta mas de dos ecuaciones y dos incógnitas, es decir el mismo número de ecuaciones y el mismo número de incógnitas, establecidos para ser resueltos simultáneamente. Fíjese en estos ejemplos:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ -x + 3y = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y + z = -2 \\ 2x - 5y + z = 1 \\ -y + 2z = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} u + v = 3 \\ 2u - 3v = 10 \end{cases}$$

Se puede comprobar que el número de ecuaciones corresponde con el número de incógnitas, además todas las variables están elevadas a la primera potencia.

A continuación una aplicación muy común de la vida real en la que se exiben dos condiciones en modo matemático, entonces las condiciones son:

El administrador de una fábrica establece dos maneras de producción para dos modelos de un producto nuevo. El modelo A requiere de 4 piezas del tipo I y 9 piezas del tipo II. El modelo B requiere de 5 piezas del tipo I y 14 piezas del tipo II.

De sus proveedores, la fábrica obtiene 335 piezas del tipo I y 850 piezas del tipo II cada día. ¿Cuántos productos de cada modelo debe producir cada día, de modo que todas las piezas del tipo I y piezas del tipo II sean utilizadas?

Construir una tabla también ayuda a visualizar la información:

	Modelo A	Modelo B	Disponible

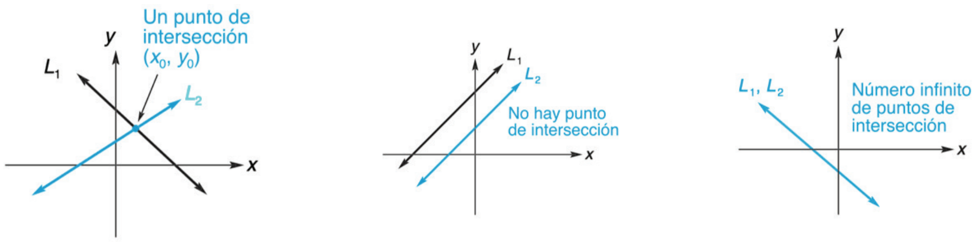
Piezas tipo 1	4	5	335
Piezas tipo 2	9	14	850

Si la información de la tabla la modelamos matemáticamente se puede expresar asi:

$$\begin{cases} \mathbf{4x + 5y = 335} \\ \mathbf{9x + 14y = 850} \end{cases}$$

A este conjunto de ecuaciones se les denomina Sistemas de ecuaciones lineales, al encontrar los valores de "x" y de "y", que satisfacen simultáneamente a las dos ecuaciones. Estas soluciones pueden ser reales o imaginarias, para nuestro caso y carrera solamente tomaremos en cuenta las soluciones reales y lógicas.

Como las ecuaciones son lineales, sus gráficas son líneas rectas; llamémoslas L_1 y L_2. Ahora, las coordenadas de cualquier punto sobre una línea satisfacen la ecuación de esa línea; esto es, hacen a la ecuación verdadera. Por tanto, las coordenadas de cualquier punto de intersección de L_1 y L_2 satisfacen ambas ecuaciones. Esto significa que un punto de intersección da una solución del sistema. Pero pueden darse tres condiciones, analice los gráficos que siguen:



Cuando se produce la intersección es la coordenada solución del sistema.

Recuerde:
Que el valor de la coordenada "x" y de "y", son la solución del sistema.

Se puede solucionar un sistema lineal de ecuaciones por cuatro maneras, a continuación, le explico.

4.5 Método de igualación

Dado el sistema, ordene las ecuaciones, identifiquelas, para nuestro caso L1 y L2..

$$\begin{matrix} \boldsymbol{L1} \\ \boldsymbol{L2} \end{matrix}\begin{cases} \mathbf{4x + 5y = 335} \\ \mathbf{9x + 14y = 850} \end{cases}$$

Elija una variable que puede ser la "x" y despejamos ésta de cada ecuación:

$$de\ L1, 4x + 5y = 335$$
$$4x = 335 - 5y$$
$$x = \frac{335 - 5y}{4}$$

$$de\ L2, 9x + 14y = 850$$
$$9x = 850 - 14y$$
$$x = \frac{850 - 14y}{9}$$

Esta situación nos lleva a igualar los segundos miembros de cada ecuación, asi:

$$\frac{335 - 5y}{4} = \frac{850 - 14y}{9}$$

Elimar los denominadores multiplicando por 36 que es el MCD. da:

$$9(335 - 5y) = 4(850 - 14y)$$

Puede apreciar que se convirtió en una ecuación de una incógnita, al resolverla así:

$$3015 - 45y = 3400 - 56y$$

Transponiendo y simplificando da:

$$11y = 385$$

$$\boldsymbol{y = 35, \quad Rta.}$$

Se ha encontrado el valor de "y" una de las variables, este valor lo reemplazamos en cualquiera de las ecuaciones para encontrar "x", por ejemplo en **L1**, en la expresión que ya está despejada de la siguiente manera:

$$x = \frac{335 - 5y}{4}$$

$$x = \frac{335 - 5(11)}{4} = \frac{335 - 55}{4} = \frac{280}{4}$$

$$\boldsymbol{x = 40, \quad Rta.}$$

La solución del sistema se cumple cuando x=40, y y=35.

Recuerde:
Que el valor de la coordenada "x" y de "y", son la solución del sistema.

4.6 Método de substitución

Dado el sistema, ordene las ecuaciones, identifiquelas, para nuestro caso L1 y L2..

$$\begin{matrix} L1 \\ L2 \end{matrix}\begin{cases} \mathbf{4x+5y=335} \\ \mathbf{9x+14y=850} \end{cases}$$

Elija una variable que puede ser la "x" y despeje de cualquier ecuación:

$$de\ L1,\ 4x+5y=335$$

$$4x=335-5y$$

$$x=\frac{335-5y}{4}$$

Esta expresión la sustituimos en **L2**

$$en\ L2,\ 9x+14y=850$$

$$9\left(\frac{335-5y}{4}\right)+14y=850$$

Eliminar denominadores, por "4".

$$3015-45y+56y=3400$$

$$11y=385$$

$$\boldsymbol{y=35,\quad Rta.}$$

Otra vez, el valor encontrado de "y", se reemplaza en la expresión despejada **L1**, que nos permita encontrar "x", de la siguiente manera:

$$x=\frac{335-5(35)}{4}=\frac{335-175}{4}=\frac{160}{4}$$

$$\boldsymbol{x=40,\quad Rta.}$$

La solución del sistema se cumple cuando x=40, y y=35.

4.7 Método de suma y resta

Dado el sistema, ordene las ecuaciones, identifiquelas, para nuestro caso L1 y L2..

$$\begin{matrix} L1 \\ L2 \end{matrix}\begin{cases} \mathbf{4x+5y=335} \\ \mathbf{9x+14y=850} \end{cases}$$

Elija un nùmero que al multiplicarse en cualquiera de las ecuaciones se conviertan en ecuaciones equivalente y nos permita sumar o restar y de esa manera eliminar una de las variables. Por ejemplo si a L1 le multiplica por "9" y a L2 por "4" y restamos las ecuaciones obtendremos lo siguiente:

$$\begin{matrix} *\mathbf{9} & L1 \\ *\mathbf{-4} & L2 \end{matrix}\begin{cases} \mathbf{4x+5y=335} \\ \mathbf{9x+14y=850} \end{cases}$$

Obtiene un sistema equivalente como el siguiente:

$$\begin{matrix} L1 \\ L2 \end{matrix}\begin{cases} \mathbf{36x+45y=3015} \\ \mathbf{-36x-56y=-3400} \end{cases}$$

Si sumanos las dos ecuaciones se elimina la "x" y podemos obtener "y", asi:

$$-11y=-385$$

Despejando la "y", da:

$$y=\frac{-385}{-11}=35$$

$$\boldsymbol{y=35,\quad Rta.}$$

Otra vez, el valor encontrado de "y", se reemplaza en **L1**, que nos permita encontrar "x", de la siguiente manera:

$$x=\frac{335-5(35)}{4}=\frac{335-175}{4}=\frac{160}{4}$$

$$\boldsymbol{x=40,\quad Rta.}$$

La solución del sistema se cumple cuando x=40, y y=35.

4.8 Método gráfico

Este método, permite encontrar graficamente el punto de intersección de dos líneas rectas que representan a las dos ecuaciones a resolver, el procedimiento es simple y es:

Dado el sistema, ordene las ecuaciones, identifiquelas, para nuestro caso L1 y L2..

$$\begin{matrix} L1 \\ L2 \end{matrix}\begin{cases} \mathbf{4x+5y=335} \\ \mathbf{9x+14y=850} \end{cases}$$

Conviene despejar la "y" de cada ecuación de la siguiente manera:

$$de\ L1,\ 4x+5y=335$$

$$5y=335-4x$$

$$y=\frac{335-4x}{5}$$

$$de\ L2,\ 9x+14y=850$$

$$14y=850-9x$$

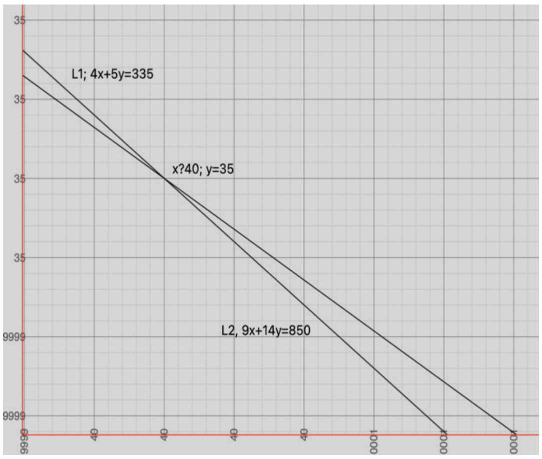
$$y=\frac{850-9x}{14}$$

Podemos asignar valores a "x" que nos arrojen valores enteros y prácticos para representar en un plano cartesiano, además de que al ser rectas solamente necesitaremos dos punto para poder dibujarlas a partir de pares ordenados representados en las tablas siguientes. así:

x	y
0	67
10	59

x	y
-2	62
26	44

Se pueden representar estos cuatro puntos y obtener el punto de intersección asi:



Recuerde:
Que el valor de la coordenada "x" y de "y", son la solución del sistema.

Se puede solucionar un sistema gráficamente sin tener conocimientos de procesos matemática si utiliza una aplicación informática.

En la gráfica se puede obserbar que la intersección se produce con la solución del sistema es decir en las coordenadas x=40, y. y=35.

La solución del sistema se cumple cuando x=40, y y=35.

Ejemplo 47

Resolución de un sistema de ecuaciones por todos los métodos:

Dado el sistema, de ecuaciones, L1 y L2..

$$\begin{matrix} L1 \\ L2 \end{matrix}\begin{cases} \mathbf{3x - 4y = 13} \\ \mathbf{3y + 2x = 3} \end{cases}$$

Por igualación:

$de\ L1,\ 3x - 4y = 13$

$3x = 13 + 4y$

$$x = \frac{13 + 4y}{3}$$

$de\ L2,\ 2x + 3y = 3$

$2x = 3 - 3y$

$$x = \frac{3 - 3y}{2}$$

$$\frac{13+4y}{3}=\frac{3-3y}{2}$$

$$2(13+4y)=3(3-3y)$$

$$26+8y=9-9y$$

$$17y=-17$$

$$y=\frac{-17}{17}=-1$$

$$\boldsymbol{y=-1,\quad Rta.}$$

Se ha encontrado el valor de "y" una de las variables, este valor lo reemplazamos en cualquiera de las ecuaciones para encontrar "x", por ejemplo en **L1**, en la expresión que ya está despejada de la siguiente manera:

$$x=\frac{13+4y}{3}$$

$$x=\frac{13+4(-1)}{3}=\frac{13-4}{3}=\frac{9}{3}$$

$$\boldsymbol{x=6,\quad Rta.}$$

La solución del sistema se cumple cuando x=6, y y= -1.

Por sustitución

Dado el sistema, de ecuaciones, L1 y L2..

$$\begin{matrix}\boldsymbol{L1}\\ \boldsymbol{L2}\end{matrix}\begin{cases}\mathbf{3x-4y=13}\\ \mathbf{3y+2x=3}\end{cases}$$

Elija una variable que puede ser la "x" y despeje de cualquier ecuación:

$$de\ L1,\ 3x-4y=13$$

$$3x=13+4y$$

$$x=\frac{13+4y}{3}$$

Esta expresión la sustituimos en **L2**

$$en\ L2,\ 2x+3y=3$$

$$2\left(\frac{13+4y}{3}\right)+3y=3$$

Eliminar denominadores, por "3".

$$26+8y+9y=9$$

$$17y=-17$$

$$\boldsymbol{y=-1,\quad Rta.}$$

Otra vez, el valor encontrado de “y”, se reemplaza en la expresión despejada **L1**, que nos permita encontrar “x”, de la siguiente manera:

$$x = \frac{13 + 4y}{3} = \frac{13 + 4(-1)}{3} = \frac{9}{3} = 6$$

$$\boldsymbol{x = 6, \quad Rta.}$$

La solución del sistema se cumple cuando x=6, y y= -1.

Por suma y resta

Dado el sistema, ordene las ecuaciones, L1 y L2..

$$\begin{matrix} \boldsymbol{L1} \\ \boldsymbol{L2} \end{matrix}\begin{cases} \mathbf{3x - 4y = 13} \\ \mathbf{2x + 3y = 3} \end{cases}$$

Si desea eliminar la variable “x”, deberemos multiplicar por “2” y por “-3”, entonces el sistema se traduce en un sistema equivalente de la siguiente manera:

$$\begin{matrix} \boldsymbol{*\,2} \\ \boldsymbol{*\,-3} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \boldsymbol{L1} \\ \boldsymbol{L2} \end{matrix}\begin{cases} \mathbf{6x - 8y = 26} \\ \mathbf{-6x - 9y = -9} \end{cases}$$

Si sumamos las dos ecuaciones, obtenemos lo siguiente:

$$-17y = 17$$

$$y = \frac{17}{-17} = -1$$

$$\boldsymbol{y = -1, \quad Rta.}$$

Otra vez, el valor encontrado de “y”, se reemplaza en la expresión despejada **L1**, que nos permita encontrar “x”, de la siguiente manera:

$$x = \frac{13 + 4y}{3} = \frac{13 + 4(-1)}{3} = \frac{9}{3} = 6$$

$$\boldsymbol{x = 6, \quad Rta.}$$

La solución del sistema se cumple cuando x=6, y y= -1.

Por gráfico

Dado el sistema, ordene las ecuaciones, identifiquelas, para nuestro caso L1 y L2..

$$\begin{matrix} \boldsymbol{L1} \\ \boldsymbol{L2} \end{matrix}\begin{cases} \mathbf{3x - 4y = 13} \\ \mathbf{2x + 3y = 3} \end{cases}$$

Conviene despejar la “y” de cada ecuación de la siguiente manera:

$$de\ {\color{red}L1,}\ 3x - 4y = 13$$

$$-4y = 13 - 3x$$

$$y = \frac{13 - 3x}{-4}$$

$$de\ {\color{red}L2,}\ 2x + 3y = 3$$

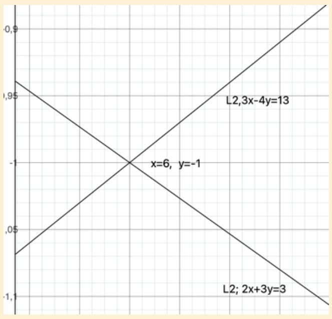
$$3y = 3 - 2x$$

$$y = \frac{3 - 2x}{3}$$

Podemos asignar dos valores a “x” que son suficientes para poder dibujarlas a partir de pares ordenados representados en las tablas siguientes. así:

x	y
7	2
9	3,5

x	y
0	1
1,5	0



En la gráfica se puede obserbar que la intersección se produce con la solución del sistema es decir en las coordenadas x=6, y. y= -1.

La solución del sistema se cumple cuando x=6, y y= -1.

Se puede resolver más ejemplos del Ejercicio 4.4, de su Texto básico, los ejemplos del 2 al 20, que le permitirá mejorar y dominar el tema.

Se ha concluido el estudio de esta primera unidad, siempre le recomiendo revisar lo recomendado hasta que domine el tema en particular y detalles que usted confirma necesita mejorar y así conocer su nivel de conocimientos.

A continuación, le invito a desarrollar la siguiente autoevaluación, cuyo objetivo es conocer cuánto usted ha comprendido del tema, además podrá revisar en la sección del solucionario, la retroalimentación de cada pregunta.

Estoy seguro de que le irá ¡muy bien!

Autoevaluación 4.8

Lea y responda en el espacio entre paréntesis si es verdadera con “V” o falsa con “F”.

1.-	( )	El sistema $\begin{cases} 2x+3y=7 \\ x-2y=0 \end{cases}$, *tiene por ecuación matricial*: $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \end{bmatrix}$
2.-	( )	El sistema $\begin{cases} x+2y=8 \\ 2x+4y=-4 \end{cases}$.tiene por ecuación matricial: $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -4 \end{bmatrix}$
3.-	( )	El sistema $\begin{cases} x+2y=8 \\ 2x+4y=-4 \end{cases}$. *tiene por matriz reducida*: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 2 & 4 & -4 \end{bmatrix}$
4.-	( )	Dadas las matrices: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, *no son multiplicables*.
5.-	( )	El producto siguiente: $2[1 \quad 0 \quad -1]$, es: $[0]$
6.-	( )	La transpuesta de: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$, es: $\begin{bmatrix} 1 & \quad \\ 1 & \quad \\ & \end{bmatrix}$
7.-	( )	De un sistema de ecuaciones, $\begin{cases} y=r \\ x=2-5r \end{cases}$; quiere decir que: $\begin{matrix} x=2-5y \\ y=r \end{matrix}$
8.-	( )	*Este sistema*: $\begin{cases} w+t=500 \\ 0.3w+0{,}18t=125 \end{cases}$; *tiene por solución*: $\begin{matrix} x=291 \\ y=208 \end{matrix}$

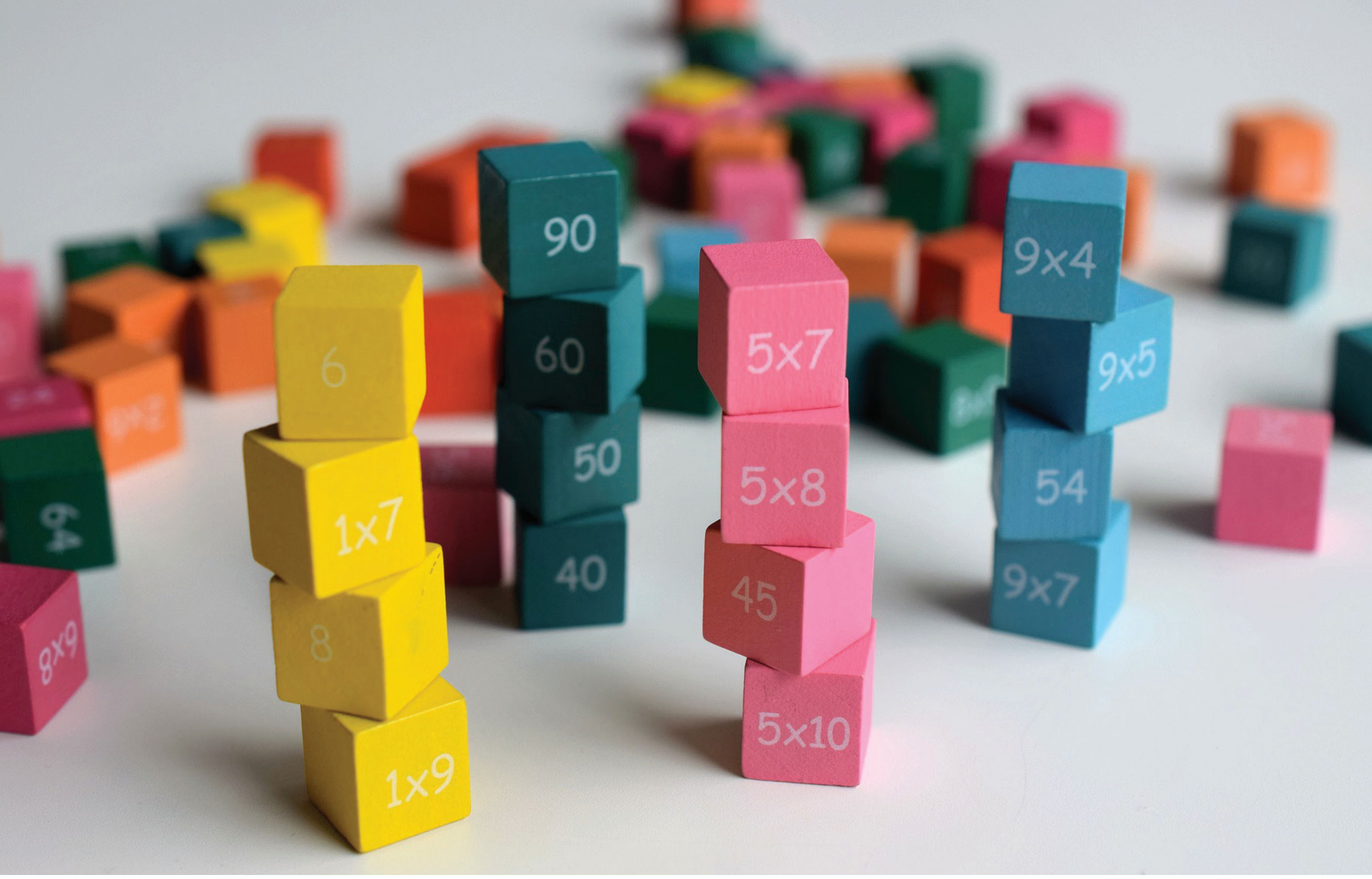
Verifique sus respuestas en el solucionario al final de la presente guía didáctica.

“Si Las matemáticas son la gimnasia del espíritu y una preparación para la filosofía"

Sócrates

¡¡Éxitos en la tarea que ha emprendido!!

Ir al solucionario



2

Segundo Bimestre

Resultado de aprendizaje	**Sabe y conoce los antecedentes y nociones generales o básicas de la Matemática**

Por medio de este resultado de aprendizaje, usted llegará a determinar la evolución de la matemática a través del tiempo e identificará los números como símbolos necesarios para el desarrollo del conocimiento de la humanidad.

En la presente unidad se conocerá los números su origen, evolución, tipos y aplicación de estos en situaciones reales, para lo cual deberá identificar, ubicar y utilizar de adecuada manera en problemas y ejercicios propuestos.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje

Algebra matricial

Semana 9

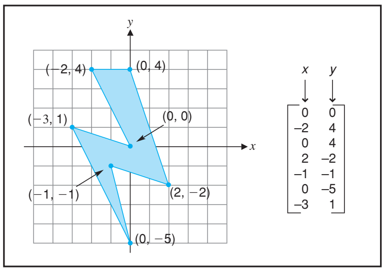
Unidad 5 “Álgebra matricial”

5 Álgebra de matrices

5.1 Teoría de matrices

Las matrices, son arreglos con los números, el álgebra respectiva tienen una aplicación potencial siempre que una información numérica se pueda acomodar de manera significativa en bloques rectangulares.

La aplicación de las matrices son variadas como el ejemplo gráfico que se observa.



Se puede resolver ecuaciones a partir de matrices y posteriormente generar determinantes.

La búsqueda de formas para describir situaciones en matemáticas y economía, condujo al estudio de arreglos rectangulares de números. Por ejemplo, considere el sistema de ecuaciones lineales que es llamado *matriz* (plural: *matrices*).

$$\begin{cases} 3x + 4y + 3z = 0, \\ 2x + y - z = 0, \\ 9x - 6y + 2z = 0. \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 9 & -6 & 2 \end{bmatrix},$$

Con frecuencia, en economía es conveniente utilizar matrices en la formulación de problemas y para exhibir datos. Por ejemplo, un fabricante que manufactura los productos A, B y C, podría representar las unidades de mano de obra y material involucrados en una semana de producción de estos artículos, de la siguiente manera:

	Producto		
	A	B	C
Mano de obra	10	12	16
Material	5	9	7

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 10 & 12 & 16 \\ 5 & 9 & 7 \end{bmatrix}.$$

Los renglones de una matriz están numerados de manera consecutiva de arriba hacia abajo, y las columnas están numeradas de manera consecutiva de izquierda a derecha. Para la matriz A anterior, tenemos

$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{ccc} \text{columna 1} & \text{columna 2} & \text{columna 3} \end{array} \\ \begin{array}{r} \text{renglón 1} \\ \text{renglón 2} \end{array} & \begin{bmatrix} 10 & 12 & 16 \\ 5 & 9 & 7 \end{bmatrix} = \mathbf{A}. \end{array}$$

Consideraremos a tales arreglos rectangulares como objetos por sí mismos; se acostumbra encerrarlos entre corchetes, y también es común que se utilicen paréntesis. En la representación simbólica de matrices usaremos letras mayúsculas en negritas como A, B, C,...

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & -2 \\ 5 & 1 & -4 \\ -3 & 5 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & -8 \end{bmatrix}$$

Una matriz e un arreglo rectangular que consiste en m reglones y n columnas, a eso se le conoce como matriz de m x n, o matriz de orden m x n, Para identificar la posición se utiliza a_{ij} en el que "i" es fila y "j" es columna. Hay matrices específicas como:

$$\boldsymbol{matriz\ reglón\ o\ vector\ regón}:\ \boldsymbol{A} = [\mathbf{1} \quad \mathbf{4} \quad \mathbf{-2}],$$

Con frecuencia, en economía es conveniente utilizar matrices en la formulación de problemas y para exhibir datos. Por ejemplo, un fabricante que manufactura los productos A, B y C, podría representar las unidades de mano de obra y material involucrados en una semana de producción de estos artículos, de la siguiente manera:

	Producto		
	A	B	C
Mano de obra	10	12	16
Material	5	9	7

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 10 & 12 & 16 \\ 5 & 9 & 7 \end{bmatrix}.$$

Los renglones de una matriz están numerados de manera consecutiva de arriba hacia abajo, y las columnas están numeradas de manera consecutiva de izquierda a derecha. Para la matriz A anterior, tenemos

$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{ccc} \text{columna 1} & \text{columna 2} & \text{columna 3} \end{array} \\ \begin{array}{r} \text{renglón 1} \\ \text{renglón 2} \end{array} & \begin{bmatrix} 10 & 12 & 16 \\ 5 & 9 & 7 \end{bmatrix} \end{array} = \mathbf{A}.$$

Consideraremos a tales arreglos rectangulares como objetos por sí mismos; se acostumbra encerrarlos entre corchetes, y también es común que se utilicen paréntesis. En la representación simbólica de matrices usaremos letras mayúsculas en negritas como A, B, C,...

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & -2 \\ 5 & 1 & -4 \\ -3 & 5 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & -8 \end{bmatrix}$$

Una matriz e un arreglo rectangular que consiste en m reglones y n columnas, a eso se le conoce como matriz de m x n, o matriz de orden m x n, Para identificar la posición se utiliza a_{ij} en el que "i" es fila y "j" es columna. Hay matrices específicas como:

$$\boldsymbol{matriz\ reglón\ o\ vector\ regón}:\ \boldsymbol{A} = [\mathbf{1} \quad \mathbf{4} \quad \mathbf{-2}],$$

matriz comumna o vector columna: $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} \\ \mathbf{3} \end{bmatrix}$

Analice como nombramos a las siguientes matrices:

Recuerde:
"i" es fila y
"j" columna.

$a)\ [1 \quad 3 \quad -1], matriz\ de\ orden\ 1\ x\ 3.$

$b)\ \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, matriz\ de\ orden\ 2\ x\ 2.$

$c)\ \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -2 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, matriz\ de\ orden\ 2\ x\ 3.$

$d)\ \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -3 \\ 4 & -2 & 3 \end{bmatrix}, matriz\ de\ orden\ 3\ x\ 3.$

Se puede crear matrices de cualquier orden y si son sistemas de ecuaciones por lo general tienen una columna mas.

5.2 Igualdad de matrices

Dos matrices $A = [a_{ij}]\ y\ B = [b_{ij}]$, son iguales si y solo si, tiene el mismo orden y $a_{ij} = b_{ij}$, para cada "i" y para cada "j". Los ejemplos siguientes expresan mejor esta definición.

$\begin{bmatrix} 2+1 & \frac{3}{3} \\ 3*5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 15 & 0 \end{bmatrix}$, pero: $[1 \quad -1] \neq \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\ y\ también\ \neq [1 \quad 1] \neq [1 \quad 1 \quad 1]$

Una ecuación matricial puede definir un sistema de ecuaciones, por ejemplo:

$$\begin{bmatrix} x & y+1 \\ 2z & 5w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Es equivalente a un sistema correspondiente:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y + 1 = 7 \\ 2z = 4 \\ 5w = 2 \end{cases}$$

Se resuelve el sistema y se tiene:
x=2, y=6, z=2, w=2/5.

Explore los ejemplos 24 y 25 del Ejercicio 6.1 de su Texto básico, para identificar sistemas de ecuaciones.

5.3 Transpuesta de una matriz

Si A es una matriz que se forma a partir de A por intercambio de sus reglones con sus columnas se conoce como la Transpuesta de A. La definición dice que la transpuesta de una matriz A de m x n, denotada como A^T, es la matriz de n x m, cuyo i-ésimo renglón es la i-esima columa de A. Así:

Dada la matriz A, encontrar su transpuesta:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, entontrar\ A^T$$

La mtriz A es de 2 x 3, de modo que A^T,es de 3 x 2. La columna 1 de A se convierte en el rengón 1 de A^T, la columna 2 se convierte en el rengón 2 y la columna 3 se convierte en el renglón 3. Así:

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Observe que las columnas de A ^{T}son los renglones de A. Debe darse cuenta de que si tomamos la transpuesta de nuestra respuesta, obtendremos la matriz original A. Esto es, la operación transpuesta tiene la propiedad de que, $(A^T)^T = A$.

Recuerde:
La matriz cuadrada es n x n,: la matriz A de 3 x 3, sería:

$$A= \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ -1 & 2 - & 4 \end{bmatrix}$$

Recuerde:
La matriz cero debe especificar el orden, por ejemplo: la matriz 0 de 2 x 3, sería:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Explore el Ejercicio 6.1 de su Texto básico, sobre el orden de matrices.

Recuerde:
La matriz diagonal es cuadrada, así:

$$A= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

5.4 Operaciones básicas con matrices

Las siguientes operaciones básicas se cumplen también con las matrices:

Propiedades para la suma de matrices

1. $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$	(propiedad conmutativa),
2. $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$	(propiedad asociativa),
3. $\mathbf{A} + \mathbf{O} = \mathbf{O} + \mathbf{A} = \mathbf{A}$	(propiedad del neutro aditivo).

Si las matrices tienen el mismo orden, entonces las propiedades siguientes se cumplen.

5.4.1 Suma de matrices

Se da las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Encontrar A + B

$$A + B = \begin{bmatrix} 1+0 & 2+3 & 1+3 \\ 0+1 & 2+1 & 2-1 \\ -1-2 & 3-3 & 0+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A + B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix},} \quad \textbf{Rta.}$$

Ejemplo 48

Dada las matrices A, B, C, encuentre el valor de A+B+C:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Agrupe (A+B)+C, aplicando la propiedad asociativa:

$$A + B = \begin{bmatrix} 1-2 & -2-1 \\ 0+1 & -1+3 \end{bmatrix} + C = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + C = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A + B + C = \begin{bmatrix} -1+0 & -3+2 \\ 1+2 & 2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Reduciendo términos semejantes, así:

$$\boldsymbol{A + B + C = \begin{bmatrix} -1 & .1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix},} \quad \boldsymbol{Rta.}$$

Ejemplo 49

Dada los vectores A, B, encuentre el valor de A+B:

$$A = [1 \quad 2 \quad 3], \quad B = [2 \quad -4 \quad -6]$$

A+B= $[1+2 \quad 2-4 \quad 3-6] = [3 \quad -2 \quad -3]$

Reduciendo términos semejantes, así:

$$A + B = [3 \quad -2 \quad -3], \quad Rta.$$

Recuerde:
La suma de matrices, se opera sumando algebraicamente las posiciones respectivas.

5.4.2 Multiplicación por un escalar

Al tener un escalar, este se multiplica con cada uno de los términos que coforman la matriz, las propiedades siguientes son necesarias de comprender y dominar en su aplicación:

Propiedades de la multiplicación por un escalar

1. $k(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = k\mathbf{A} + k\mathbf{B}$.
2. $(k_1 + k_2)\mathbf{A} = k_1\mathbf{A} + k_2\mathbf{A}$.
3. $k_1(k_2\mathbf{A}) = (k_1k_2)\mathbf{A}$.
4. $0\mathbf{A} = \mathbf{O}$.
5. $k\mathbf{O} = \mathbf{O}$.

fíjese en el ejemplo siguiente:

Multiplique cinco veces a la matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 9 & -2 \end{bmatrix}$

$$5A = 5\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 9 & -2 \end{bmatrix}$$

$$5A = \begin{bmatrix} 5*3 & 5*6 \\ 5*9 & 5*-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 30 \\ 45 & -10 \end{bmatrix}$$

Operando la multiplicación para cada posición por el escalar, da:

$$\boldsymbol{5A = \begin{bmatrix} 15 & 30 \\ 45 & -10 \end{bmatrix}, \quad Rta.}$$

Ejemplo 50

Dada los vectores A, B, encuentre el valor de -2A+3B:

$$A = [1 \quad 2 \quad 3], \quad B = [2 \quad -4 \quad -6]$$

Expresemos las multiplicaciones:

-2A$= -2[1 \quad 2 \quad 3], \quad 3B = 3[2 \quad -4 \quad -6]$

$$-2A + 3B = [-2*1 \quad -2*2 \quad -2*3] + [3*2 \quad 3*-4 \quad 3*-6]$$

$$-2A + 3B = [-2 \quad -4 \quad -6] + [6 \quad -12 \quad -18]$$

Ahora ya puede sumar, asi:

$$-2A + 3B = [-2+6 \quad -4-12 \quad -6-18]$$

Reduciendo términos semejantes así:

$$-2A + 3B = [4 \quad -16 \quad -24]$$

$$\boldsymbol{-2A + 3B = [4 \quad -16 \quad -24], \quad Rta.}$$

5.4.3 Sustracción de matrices

Aquí hay que introducir el concepto del **Negativo de una matriz,** que no es más, que multiplicar por el escalar – 1. La siguiente propiedad se hace necesario que domine:

$$-\mathbf{A} = (-1)\mathbf{A}.$$

Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$, encuentre el negativo de la matriz A.

$$-A = -1\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1*2 & -1*-3 \\ -1*-4 & -1*1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{-A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}, \quad Rta.}$$

Ejemplo 51

Dada los vectores A, B, encuentre el valor de $A^T - 2B$:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Encuentre la Transpuesta de la matriz A:

$$A^T = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, y \quad 2B = \begin{bmatrix} 2*3 & 2*-3 \\ 2*1 & 2*2 \end{bmatrix}$$

Para la transpuesta la fila ocupa la columna y multiplicamos B por 2

Encuentre – 2B, despues de multiplicar cada entrada, así:

$$2B = \begin{bmatrix} 6 & -6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, el - 2B\ sería: \quad -2B = \begin{bmatrix} -6 & 6 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$$

Finalmente operando algebraicamente tiene:

$$A^T - 2B = \begin{bmatrix} 6-6 & 2-6 \\ 0-2 & -1-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}$$

Reduciendo términos semejantes:

Recuerde:

La transpuesta de una matriz se caracteriza por escribir la fila en columna.

Ejemplo 52

Resolver la ecuación siguiente:

$$2\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = 5\begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Multipliquemos lo expreado, así:

$$\begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ -20 \end{bmatrix}$$

Restando las dos matrices primeras, así:

$$\begin{bmatrix} 2x_1 - 3 \\ 2x_2 - 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ -20 \end{bmatrix}$$

Por la igualdad de matrices podemos escribir asì:

$$2x_1 - 3 = 25, de\ aquí, \quad x_1 = 14.$$

$$2x_1 - 4 = -20, de\ aquí, \quad x_2 = -8$$

$$\boldsymbol{x_1 = 14, y \quad x_2 = -8, \quad Rta.}$$

Explore los ejemplos del 1 al 11, del Ejercicio 6.2 de su Texto básico,
Resuelva los ejemplos del 25 al 28, del mismo texto básico.
Resuelva los ejemplos del 32 al 33, del mismo texto básico.
Explore los ejemplos 35, 36, 27, del mismo texto, le servirán

Autoevaluación 5.9

Lea y responda en el espacio entre paréntesis si es verdadera con “V” o falsa con “F”.

1.-	( )	La matriz 3 x 4, tiene 3 filas y 4 columnas.
2.-	(F)	El matriz de 2 x 3, tiene 2 comunas y 3 filas
3.-	(F)	$Sumando\ las\ matrices: \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2\\-1\end{bmatrix}, se\ obtiene: \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$
4.-	( )	$Matricialmente\ 2\begin{bmatrix}2 & 2\\3 & -3\end{bmatrix}; es\ equivalente\ a: \begin{bmatrix}4 & 4\\6 & -6\end{bmatrix}$
5.-	( )	$Matricialmente\ 1\begin{bmatrix}2 & 2\\3 & -3\end{bmatrix}; es\ equivalente\ a: \begin{bmatrix}2 & 2\\3 & -3\end{bmatrix}$
6.-	( )	$Matricialmente\ \begin{bmatrix}2 & 2\\3 & -3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 2\\3 & -3\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}2 & 2\\3 & -3\end{bmatrix}$
7.-	( )	La matriz transpuesta de: $\begin{bmatrix}2 & 2\\3 & -3\end{bmatrix}, es: \begin{bmatrix}2 & 3\\2 & -3\end{bmatrix}$
8.-	(F)	La multiplicación de: $0\begin{bmatrix}2 & 2\\3 & -3\end{bmatrix}, es: [0]$

Verifique sus respuestas en el solucionario al final de la presente guía didáctica.

“La vida es buena por sólo dos cosas, descubrir y enseñar las matemáticas”

Simeón Poisson

¡¡Éxitos en la tarea que ha emprendido!!

Ir al solucionario

Resultado de aprendizaje 10

Utiliza la abstracción como una habilidad adquirida para sintetizar y analizar las situaciones propuestas.

En esta semana usted llegará a identificar expresiones denominadas matrices, esto es aquellas que presentan arreglos y llegar a resolver ejercicios estimados y considerados como ecuaciones que conllevan el uso de matrices con las operaciones básicas con matrices suma y multiplicación de matrices y la respectiva simplificación.

Conocerá y dominará la metodología que a partir de operaciones básicas determinará garantizando que domina la resolución de matrices y simplifica expresiones mediante los ordenamientos adecuados, encontrará respuestas coherentes.

La eliminación de números a partir de eliminar los términos por simples operaciones aritméticas y obtener ecuaciones sencillas que le llevan a resolver sistemas de ecuaciones complejas.

Con el conocimiento de la metodología de resolución de ecuaciones con literales y aún con mas complejidad cuando conlleva expresiones racionales, con otras equivalentes que permitan mejor su resolución y aplicación óptima de matrices.

Finalmente traducirá un lenguaje algebraico de sistemas de ecuaciones a sistemas matriciales para ser resueltos con las propiedades y reglas del álgebra matricial.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje

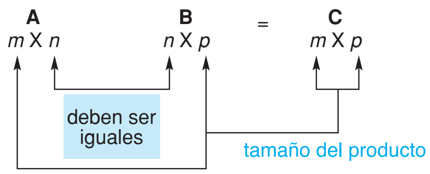
Semana 10

5.5 Multiplicación de matrices

5.5.1Multiplicación entre matrices

Para la multiplicación entre dos matrices A y B, es necesario que el número de columnas de A, sea igual al número de filas o renglones de B. La definición diría:

A partir de una matriz "A" de $m \times n$ y "B" otra matriz n x p. el producto AB es la matriz "C" de m x p cuya entrada c_{ij}, en el renglón "i" y la columna "j", se obtiene de la siguiente manera: sume los productos formados al multiplicar, el renglón "i" de A por la correspondiente columna "j" de "B". Fíjese en el siguiente esquema:



El siguiente ejemplo de aclara todo, sean las matrices A y B en cuentre de ser poisble el producto AB.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -6 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}, y \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, encuentre\ el\ producto\ AB.$$

Puede notar que el número de columnas de A es igual al número de filas de B, por lo tanto si se puede obtener el producto, operando de la siguiente manera:

$$AB = \begin{bmatrix} (2*1)+(1*0)+(-6*-2) & (2*0)+(1*4)+(-6*1) & (2*-3)+(1*2)+(-6*1) \\ (1*1)+(-3*0)+(2*-2) & (1*0)+(-3*4)+(2*1) & (1*-3)+(-3*2)+(2*1) \end{bmatrix}$$

Resolviendo las operaciones indicadas y los términos semejantes quedaría:

$$AB = \begin{bmatrix} (2)+(0)+(12) & (0)+(4)+(-6) & (-6)+(2)+(-6) \\ (1)+(0)+(-4) & (0)+(-12)+(2) & (-3)+(-6)+(2) \end{bmatrix}$$

y finalmente el producto da:

$$\boldsymbol{AB = \begin{bmatrix} 14 & -2 & -10 \\ -3 & -10 & -7 \end{bmatrix}, \quad Rta.}$$

Recuerde:
La propiedad conmutativa de matrices no está definida o no se cumple, es decir AB es diferente de BA. La razón es muy simple pues no cumple el número de columnas que sea igual al numero de filas.

Ejemplo 53

Resolver la multiplicación siguiente:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Una fila y una columna, son multiplicables, así:

$[(3 * 6) + (2 * 5) + (1 * 4)]$=$[18 + 10 + 4]$

Reduciendo términos semejantes tenemos:

$$[\mathbf{32}], \quad \boldsymbol{Rta.}$$

Ejemplo 54

Resolver la multiplicación siguiente:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Dos filas y dos columnaa, son multiplicables, así:

$$\begin{bmatrix} (2 * -2) + (-1 * 1) & (2 * 1) + (-1 * 4) \\ (3 * -2) + (1 * 1) & (3 * 1) + (1 * 4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 - 1 & 2 - 4 \\ -6 + 1 & 3 + 4 \end{bmatrix}$$

Reduciendo términos semejantes tenemos:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{-5} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{-5} & \mathbf{7} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{Rta.}$$

Las propiedades de la multiplicación se presentan así:

Propiedades de la multiplicación de matrices

1. $\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$ (propiedad asociativa),
2. $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC},$ (propiedades distributivas).

   $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$

5.6 La matriz identidad

Es aquella matriz cuya diagonal tiene solo números uno. Son ejemplos los siguientes:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{I}^{\mathrm{T}} = \mathbf{I}.$$

El producto de la matriz identidad por una matriz es la misma matriz. Así:

Ejemplo 55

Resolver la multiplicación siguiente:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} * I$$

Dos filas y dos columnaa de la matriz identidad, son multiplicables, así:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2*1)+(-1*0) & (2*0)+(-1*1) \\ (3*1)+(1*0) & (3*0)+(1*1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Reduciendo términos semejantes tenemos:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{Rta.}$$

5.7 Operaciones matriciales.

Con las matrices, también se puede utilizar los sistemas de ecuaciones. La forma matricial será: AX=B. donde A es la matriz de coeficientes, X, la matriz de incógnitas o variables y B la matriz de términos independientes.

Escribir el sistema siguiente en forma matricial.

$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 4 \\ 8x_1 + 3x_2 = 7 \end{cases}$, este sistema es equivalente a la ecuación matricial siguiente:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad y \quad B = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

AX=B

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Se recomienda explore el Ejercicio 6.3 de su Texto guía y:
Resuelva los ejemplos del 8 al 10 del mismo texto básico.
Resuelva los ejemplos del 25 al 30 del mismo texto básico.
En los ejemplos 59, 60, 61 represente el sistema mediante las respectivas ecuaciones matriciales correspondientes.

Solución de un sistema de ecuaciones lineales por Reducción

Dado el sistema:

$$\begin{cases} 2x + 3y = -1 \\ 2x + y = 5 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

Es permitido:

Intercambiar filas, intercambiar columnas, multiplicar por un escalar una fila o una columna y sumarla o restarla de otra. Finalmente es tratar de conseguir la mayor cantidad de ceros en la matriz, para que se pueda leer directamente el valor de las incógnitas. De lo siguiente manera: Obtener la matriz aumentada que son los coeficientes y los términos independientes:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{Intercambiar\ la\ F1\ por\ la\ F3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-2F1 + F2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-2F1 + F3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-2F1+F3}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 3\\ 0 & 1 & -3\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-1F2}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -3\\ 0 & 1 & -3\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-F2+F1}\begin{bmatrix}1 & 0 & 4\\ 0 & 1 & -3\\ 0 & 1 & -3\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-F1+F3}\begin{bmatrix}1 & 0 & 4\\ 0 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Pasemos al sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x+0y=4\\ 0x+y=-3\\ 0x+0y=0\end{cases}$$

Tenemos:

$$\boldsymbol{x=4}\quad \boldsymbol{y=-3'}\quad \boldsymbol{Rta.}$$

Se recomienda explore el Ejercicio 6.4 de su Texto guía y:
Resuelva los ejemplos del 14 al 20

Se ha concluido el estudio de esta unidad, siempre le recomiendo revisar lo recomendado hasta que domine el tema en particular y detalles que usted confirma necesita mejorar y así conocer su nivel de conocimientos.

A continuación, le invito a desarrollar la siguiente autoevaluación, cuyo objetivo es conocer cuánto usted ha comprendido del tema, además podrá revisar en la sección del solucionario, la retroalimentación de cada pregunta.

Estoy seguro de que le irá ¡muy bien!

Autoevaluación 5.10

Lea y responda en el espacio entre paréntesis si es verdadera con "V" o falsa con "F".

1.-	( )	La matriz 3 x 4, tiene 3 filas y 4 columnas.
2.-	( )	El sistema: $\begin{cases} x+2y=8 \\ 2x+4y=-4 \end{cases}$; *es equivalente a*: $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -4 \end{bmatrix}$
3.-	( )	*Matricialmente* $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -4 \end{bmatrix}$, *genera el sistema*: $\begin{cases} x+2y=8 \\ 2x+4y=-4 \end{cases}$;
4.-	( )	*Matricialmente* $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$, *genera el sistema*: $\begin{cases} 2x+2y=1 \\ 3x-3y=4 \end{cases}$;
5.-	( )	El sistema: $\begin{cases} 2y=1 \\ x+y=-1 \end{cases}$; *es equivalente a*: $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$
6.-	( )	La siguiente expresión: -1$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$, *es*: $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$
7.-	( )	Multiplicando: $[-2 \quad 3]\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, *se tiene*: $[-5 \quad 1]$
8.-	( )	La matriz: $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, *tiene como reducida*: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

Verifique sus respuestas en el solucionario al final de la presente guía didáctica.

"El estudio de las matemáticas, como el Nilo comienza con minuciosidad y termina con magnificencia"

Caleb Colton

¡¡Éxitos en la tarea que ha emprendido!!

Ir al solucionario

Resultado de aprendizaje 11

Utiliza la abstracción como una habilidad adquirida para sintetizar y analizar situaciones propuestas que pueden ser modeladas matemáticamente.

En esta semana usted llegará a dominar y a comprender aplicando a situaciones reales sobre las funciones y sus propiedades, comprenderá acercándose a que un modelo a mas de ser físico, podría ser matemática y reemplazar una situación real de funcionamiento de algún proceso o mecanismo industrial con la herramienta funciones.

Conocerá los valores que pueden ser calculados y cuales no cumplen criterios de selección, además reconocerá rangos de cantidades a ser tomadas en cuenta en casos inexistentes para cuyas situaciones no hay manera de modelar por simple sentido común.

Finalmente, con el conocimiento de la metodología de funciones, identificará aquellas que son lineales de las cuadráticas o de orden superior, identificará puntos notables, puntos de intersección, vértices el uso y funcionamiento de una línea recta y de la parábola como figura de representación cuadrática, con el número de respuestas reconociendo cuales son soluciones reales o no.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje

Algebra de funciones

Semana 11

Unidad 6 “Operaciones con funciones”

6 Funciones y operaciones

6.1 Funciones

El cálculo fue inventado por Leibniz, en el siglo XVII, y además introdujo las funciones en la matemática y fue la base para el estudio del cálculo diferencial. La función es una relación en la que se tiene una “salida” debido a que se introdujo una “entrada”.

Un ejemplo que ayuda es cuando se tiene el Monto de una inversión que sería “salida” y que al brindar un Capital “entrada” que pasa por un proceso que para el ejemplo sería una tasa de interés y el tiempo, cuando esta inversión se encuentre invertida, se dice que el capital de inversión es una “función” del tiempo. Todo lo expresado se puede modelar con una expresión matemática que se denomina función y que por ella se tiene una salida

Para ejemplificar esto, una inversión de $1000, oo (C), colocada a 5% (i), anual genera un Monto durante un plazo “t”, estas variables se modelan con la siguiente ecuación:

$$M = C(1 + it)$$

Si la entrada t es 2 años, la función arroja una salida M de $1100, oo, es decir que haciendo variar “t” generaría uno y solo un valor de M,

Una función entonces es una regla que asigna a cada variable de entrada exactamente un valor de salida. Al conjunto de valores de entrada se los llama “dominio” y el conjunto de valores de salida se denomina "recorrido o rango, una tabla podría explicar lo expresado. Fíjese.

entrada	función	salida
t		M
1		1050, oo
2	C(1+it))	1100, oo
3		1150, oo
4		2000, oo

Como se puede hacer variar los valores de la entrada, se dice que es una "variable independiente" y como los valores de salida requieren de un proceso lo denominamos "variable dependiente". Un ejemplo es el siguiente:

$$y = 2x - 1$$

que se escribe en lenguaje de función como:

$$y = f(x)$$

$f(x)$, que se lee "f de x", representa el número de salida en el rango de f que corresponde al número de entrada x en el dominio.

entrada
↓
$\underbrace{f(x)}$
↑
salida

Si al valor de la entrada le multiplico por 2 y a ese valor le resto 1, obtenga un valor de "y" o de la función.

Se puede escribir como $f(x) = 2x - 1$

Tome en cuenta que f(x) no es "f" por "x" es el valor de "y", al procesar o

Digamos que se tiene la función $h(x) = x + x^2$, quiere decir que a cada valor "x" de entrada le asigna un número de salida $x + x^2$. Una forma de expresar esto es así:

$$h(2) = 2 + 2^2 = 6$$

$$h(-1) = (-1) + (-1)^2 = 0$$

$$h(3) = 3 + 3^2 = 12$$

$$h(x+2) = (x+2) + (x+2)^2 = x + 2 + x^2 + 2x + 4 = x^2 + 3x + 6$$
$$h(a+1) = (a+1) + (a+1)^2$$

6.2 Domínio de una función

Son todos los valores pisibles que puede tomar la viariable independiente "x" Aplique este concepto al siguiente ejemplo:

$$f(x) = \frac{2}{x-5}, Esata\ función\ puede\ tomar\ cualquier\ valor\ excepto\ el\ 5$$

Por tanto el Dominio, de la función "f(x)" son todos los números reales excepto el 5.

Ejemplo 56

Encuentre el dominio de la siguiente función:

$$f(x) = \frac{x}{x^2-1},$$

Factore el denominador

$$f(x) = \frac{x}{(x+1)(x-1)}$$

$$los\ valores\ que\ hacen\ cero\ el\ denominador\ son: x = -1\ y\ x = 1$$

$$Estos\ valores\ hacen\ cero\ el\ denominador$$

La división entre cero no está definida en matemática, por lo tanto.

El Dominio de la función son todos los reales excepto el 1 y el -1.

6.3 Recorrido o Rango de una función

Son todos los valores que adquiere la variable dependiente "y", o los que resultan de aplicar a la función los valores del Dominio, el ejemplo siguiente le ayudará a comprender:

Encuentre el dominio y rango de $f(x) = x^2 + 4$. Analice también los ejemplos 4 y 5 de la página 92 de su Texto básico.

Ejemplo 57

Encuentre el recorrido o rango de la función:

$$f(x) = \frac{x}{x-1},$$

$$f(x) = \frac{x}{(x-1)}$$

$$el\ valor\ que\ hacen\ cero\ el\ denominador\ es: x = 1$$

$$f(1) = \frac{1}{1-1} hace\ cero\ el\ denominador$$

La división entre cero no está definida en matemática, por lo tanto.

El Rango o Recorrido de la función son todos los reales mayores que el 1.

6.4 Funciones especiales

Estas funciones se caracterizan por alguna representación única, entre las que se tiene:

6.4.1 Función constante

Aquella con la cual todos los valores que adquiera la variable dará coomo resultado una constante o un valor igual siempre para cualquier valor del diminio.

La forma general es:

$$f(x) = c = constante$$

Son ejemplos los siguientes:

$$h(2) = 1, \quad g(22) = 2, \quad f(-1) = 2, \quad f(x+3) = 2$$

Recuerde:
La función constante siempre tiene un valor, independiente al valor que tome la variable.

6.4.2 Función polinómica

Se caracteriza por que en el modelo siguiente “n” es un entero y no puede ser negativo, los coeficientes “c”, no pueden ser cero y el exponente “n” mayor da el grado a la función.

Finalmente el coeficiente principal es aquel que acompaña a la variable con mayor “n”.

$$f(x) = C_n x^n + C_{n-1}x^{n-1} + C_{n-2}x^{n-2} + \cdots + C_1 x + C_0$$

Son ejemplos los siguientes:

$f(x) = 3x^4 + x - 1$	Es una función polinómica con coeficiente principal “3” y de grado “4”.
$g(x) = -1x^2 - 1$	Es una función polinómica con coeficiente principal “-1” y de grado “2”.
$h(w) = \frac{1}{3}w - \frac{2}{5}w^2 - 1$	Es una función polinómica con coeficiente principal “$\frac{-2}{5}$” y de grado “2”.

6.4.3 Función racional

Es aquella que el numerador y el denimonador son funciones polinómicas, esto es:

$f(x) = \frac{x+2}{x^2-1}$, esta función se cumple para todos los valores excepto para x=1 y x=-1.

El siguiente ejemplo tiene una novedad:

$$f(x) = x^3 - 2x - 8, Es\ también\ una\ función\ racioanl\ pues\ cumple:$$

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x - 8}{1}$$

$f(x) = x^4 + x$	Es una función racional, con coeficiente principal “1” y de grado “4”.
$g(x) = \frac{2x^3 - x - 5}{x^2}$	Es una función racional con coeficiente principal “2” y de grado “3”.
$h(w) = \frac{1}{3}w - w^2 - 1$	Es una función racional con coeficiente principal “1” y de grado “2”.

6.4.4 Función compuesta

Este tipo de función debe cumplir simultáneamente varias condiciones, fíjese en el ejemplo siguiente:

$$G(x)=\begin{cases} x-2, & si\ 2<x\leq 8 \\ 0, & si\ 1\leq x\leq 2 \\ 1, & si\ -1\leq x<1 \end{cases}$$

Si determinamos G(0): cumple $-1\leq 0<1, por\ lo\ tanto\ G(0)=1$

Si determinamos G(6): cumple $2<6\leq 8, por\ lo\ tanto\ G(6)=6-2=4$

Revise y resuelva de la página 98 de su Texto básico. los ejemplos del 2 al 26

6.5 Algebra de funciones

Las funciones se dejan combinar para generar una función diferente y nueva, para esto se pueden sumar, restar, multiplicar y dividir. Además entonces como es una álgebra de funciones se cumplen las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &= f(x)+g(x), \\ (f-g)(x) &= f(x)-g(x), \\ (fg)(x) &= f(x)\cdot g(x), \\ \frac{f}{g}(x) &= \frac{f(x)}{g(x)}. \end{aligned}$$

Fíjese en los siguientes ejemplos:

Dado $f(x)=2x^2, \quad y. \quad g(x)=6x$

Sumando las funciones por la propiedad:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=2x^2+6x$$

Entonces para x=2: $(f+g)(2)=2(2)^2+6(2)=8+12=20$

$$\boldsymbol{(f+g)(2)=20}, \quad \boldsymbol{Rta.}$$

Ejemplo 58

Encuentre el resultado de: $\frac{f}{g}(x), para\ x = -1, dado$:

$$f(x) = x^4,$$
$$g(x) = 2x^2$$

Aplique la propiedad del cociente, así:

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^4}{2x^2} = \frac{x^2}{2}$$

$$\frac{f}{g}(-1) = \frac{(-1)^2}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\boldsymbol{\frac{f}{g}(-1) = \frac{1}{2},\quad Rta.}$$

Recuerde:
El álgebra de los números reales y sus propiedades respecto de operaciones básicas es aplicable también a las funciones. .

Revise y resuelva de la página 100 de su Texto básico, el Ejercicio 3.3, 1, los ejercicios completos 1 y 3.

Se ha concluido el estudio de esta unidad, siempre le recomiendo revisar lo recomendado hasta que domine el tema en particular y detalles que usted confirma necesita mejorar y así conocer su nivel de conocimientos.

A continuación, le invito a desarrollar la siguiente autoevaluación, cuyo objetivo es conocer cuánto usted ha comprendido del tema, además podrá revisar en la sección del solucionario, la retroalimentación de cada pregunta.

Estoy seguro de que le irá ¡muy bien!

Autoevaluación 6.11

Lea y responda en el espacio entre paréntesis si es verdadera con "V" o falsa con "F".

1.-	( )	Dada la función $f(x) = 2x, el\ dominio\ son\ todos\ los\ Reales.$.
2.-	( )	Dada la función h(x)= $\frac{2}{x}, el\ dominio\ son\ los\ reales$ sin $el\ cero.$
3.-	( )	Dada la función $f(x) = 2x, el\ rango\ son\ todos\ los\ reales$
4.-	( )	Dada la función $f(3) = 2,\ f(5) = 2;\ es\ una\ función\ constante$
5.-	( )	La función $h(x) = x^2 - 3x^3 + 1$, tiene como coeficiente principal a -3
6.-	( )	La función: $f(x) = x^3, no\ es\ una\ función\ racional$
7.-	( )	La combinación de $(fg)(x), no\ es\ lo\ mismo\ que\ f(x) * g(x)$
8.-	( )	Si: $f(x) = x, \quad y. \quad g(x) = (x^2 + 1)$, entonces: $\left(\frac{f}{g}\right)(0) = 1$

Verifique sus respuestas en el solucionario al final de la presente guía didáctica.

"En las matemáticas no entiendes las cosas. Te acostumbras a ellas"

Johan Neumann

¡¡Éxitos en la tarea que ha emprendido!!

Ir al solucionario

Resultado de aprendizaje 12

Utiliza la abstracción como una habilidad adquirida para sintetizar y analizar situaciones propuestas que pueden ser modeladas matemáticamente. .

Usted llegará a dominar y a comprender aplicando a situaciones reales sobre las funciones y sus propiedades, comprenderá acercándose a que un modelo a mas de ser físico, podría ser matemática y reemplazar una situación real de funcionamiento de algún proceso o mecanismo industrial con la herramienta funciones.

Conocerá las aplicaciones de las funciones lineales como son el concepto de la pendiente, la inclinación de la recta y su aplicación en realidades de incremento o decremento de valores aplicando a pagos, decaimiento de valores o a su vez funcionalidades crecientes. Identificará puntos de intersección y la identificación de puntos mediante coordenadas que satisfacen una función lineal.

De igual manera para la función cuadrática, identificar el mínimo y máximo como valores significativos además de calcular puntos notables y proyectar como la función continua. .

Finalmente, con el conocimiento de la metodología de funciones, identificará aquellas que son lineales de las cuadráticas o de orden superior.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje

Semana 12

6.6 Graficación de funciones

Para apreciar la funcionalidad de las funciones siempre es necesario graficar las mismas en un sistema coordenado. Las coordenadas mas empleadas son las rectangulares. Toda función tiene su esquema que lo caracteriza y lo generaliza así por ejemplo una funión lineal generará una línea, una cuadrática una parábola etc, a esto se puede añadir ciertos puntos notables o peculiares.

Analiza como se representaron los siguientes puntos:

$(0;3)$

$(3;2)$

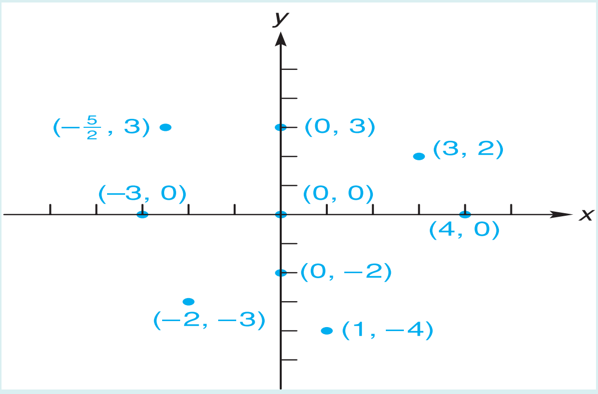
$(4;0)$

$(0;-2)$

$(1;-4)$

$(-2;-3)$

$(-3;0)$



Si se pueden representar puntos o mejor dicho un par ordenado, las funciones entonces se dejan graficar también de manera precisa y arrojando figuras típicas y de fácil esquematización, en estas figuras o gráficas se podrán identificar puntos característicos como por ejemplo, vértices, intersecciones, tendencias entre otras cualidades que tienen las funcione cuando son graficadas.

El orden o grado de una función determina también la gráfica de la misma, por ejemplo una función de grado uno, genera una linea recta, por eso se denomina función lineal, si es de segundo grado, genera una parábola o denominada función cuadrática.

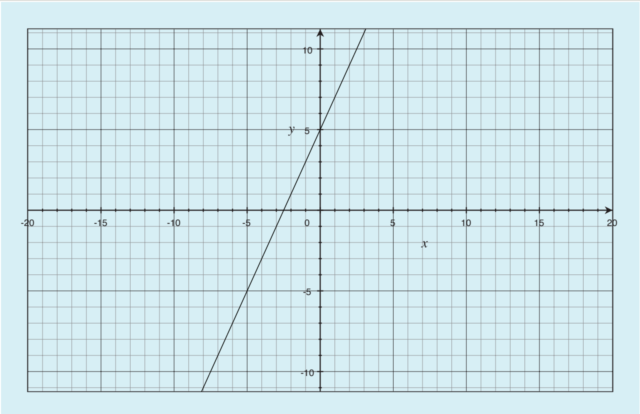
A continuación el proceso de como graficar una función y llegar a reconocer a la función que pertenece.

Tiene la siguiente función: $f(x) = 2x + 5$, Remplazamos por una ecuación de la siguiente manera: $y = 2x + 5$, Puede obserbar que es de primer grado pues el exponente de la variable independiente es "1". Dispongamos de una tabla y empezemos a dar valores a "x" y obtener los valores de "y", así:

Valores a asignar a "x"	Función como ecuación $y = 2x + 5$,	Valor obtenido para" y"
x=0	$y = 2(0) + 5$,	y=5
x=1	$y = 2(1) + 5$,	y=7
x=4	$y = 2(4) + 5$,	y=13
x=-1	$y = 2(-1) + 5$,	y=3
Y puede seguir obteniendo mas valores para "y", estos valores se pueden resumir en una tabla y graficar en coordenadas rectangulares.		

$f(x) = y = 2x + 5$

x	y
-2	1
-1	3
0	5
1	7
2	9
3	11



La función lineal arroja una línea recta

En el eje "y" corta la curva en la coordenada (0;5)

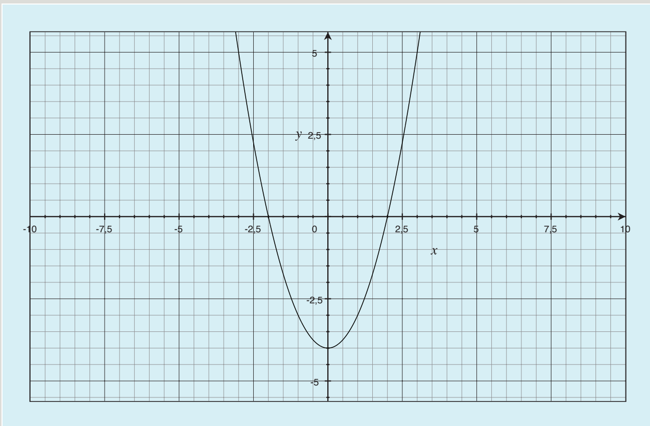
En el eje "x" corta la curva en la coordenada (-2,5;0)

Otra función $f(x) = x^2 + 2$, aplicando la misma metodología tenemos:

Valores a asignar a “x”	Función como ecuación $y = x^2 - 4,$	Valor obtenido para” y”
x=0	$y = (0)^2 - 4,$	y=-4
x=1	$y = (1)^2 - 4,$	y=-3
x=4	$y = (2)^2 - 4,,$	y=0
x=-1	$y = (-1)^2 - 4,$	y=-3
x=-2	$y = (-2)^2 - 4,$	y=0
Y puede seguir obteniendo mas valores para “y”, estos valores se pueden resumir en una tabla y graficar en coordenadas rectangulares.		

$$\boldsymbol{f(x) = y = x^2 - 4}$$

x	y
-2	6
-1	3
0	2
1	3
2	6
3	11



La función cuadrática arroja una parábola

En el eje “y” corta la curva en la coordenada (0;-4)

En el eje “x” corta la curva en la coordenada (-2;0) y (2;0)

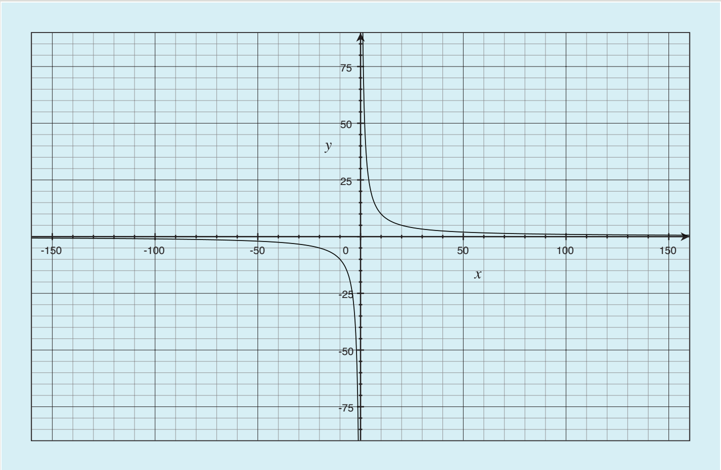
Otro ejemplo puede ser la función: $f(x) = \frac{100}{x}$, apliquemos la metodología asï:

Valores a asignar a “x”	Función como ecuación $y = \dfrac{100}{x},$	Valor obtenido para” y”
x=0	$y = \dfrac{100}{0},$	y= infinito
x=1	$y = \dfrac{100}{1}$	y=100
x=4	$y = \dfrac{100}{4}$	y=25

x=10	$y = \frac{100}{10}$	y=10
x=-4	$y = \frac{100}{-4}$	y=-25
x=-10	$y = \frac{100}{-10}$	y=-10
Y puede seguir obteniendo mas valores para "y", estos valores se pueden resumir en una tabla y graficar en coordenadas rectangulares.		

$$\boldsymbol{f(x) = y = \frac{100}{x}}$$

x	y
0	infinito
1	100
4	25
10	10
-1	-100
-4	-25



La función racional arroja una hipérbole

En el eje "y" No corta la curva.

En el eje "x" No corta la curva

Recuerde:
Siempre se puede representar una función y con la gráfica tener una idea mucho mas cercana de valores característicos a una situación real. . .

Revise y resuelva de la página 112 de su Texto básico, el Ejercicio 3.4, los ejercicios completos 5 y 6.

6.7 Función lineal

Como ya se dijo, la función lineal se expresa con una línea recta y ahora analizaremos ciertos modelos que se presentan en este tipo de función, para ello aparecen ciertas peculiaridades de la recta como por ejemplo la inclinación de la recta que puede ser creciente o positiva y aumenta hacia la derecha y la inclinación hacia la izquierda o negativa, estos y otros conceptos a continación:

6.7.1 Pendiente

Es la inclinación como un valor expresado en una razón de cambio es decir la variación de la altura en el eje "y" frente al desplazamiento horizontal en el eje "x". Se expresa como "m", así:

$$m = \frac{variación\ en\ "y"}{variación\ en\ "x"} = \frac{desplazamiento\ vertical}{desplazamiento\ horizontal}$$

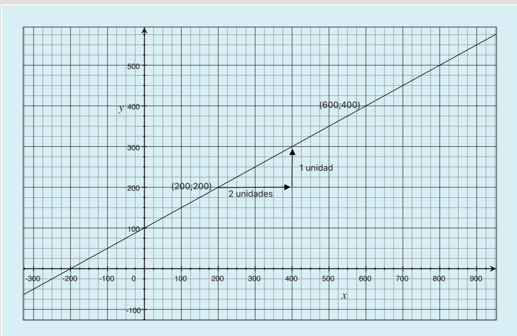
Para generar una recta es suficiente dos puntos, entonces, apliquemos a un ejemplo, en el que los puntos A(200;200) y B(600;400) son puntos que pertenecen a la recta, a partir de esta información, la definición de pendiente es:

Sean $(x_1; y_1)\ y\ (x_2; y_2), puntos\ de\ la\ recta, la\ pendiente\ "m", es:$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{desplazamiento\ vertical}{desplazamiento\ horizontal} = \frac{400 - 200}{600 - 200} = \frac{200}{400} = \frac{1}{2}$$

$$\boldsymbol{m = \frac{1}{2}}$$

A "m" se lo puede definir como la inclinación de la recta deberá crearse un triángulo que de desplaze una unidad verticalmente y dos unidades horizontalmente, entonces la hipotenusa de ese triangulo alinea la inclinación de la recta, fíjese en el gráfico siguiente:



Recuerde:
Si de cualquier punto de la recta se desplaza 2 unidades horizontalmente hacia la derecha porque es positivo y una unidad hacia arriba porque es positivo, encuentro la pendiente y la inclinación de la recta. .

6.7.2 Ordenada en el origen

Es la distancia que existe desde el origen de coordenadas hasta el punto donde la recta corta el eje “y”, responde a las coordenadas (0;b), donde “b” es la ordenada en el origen, para el caso del gráfico anterior seria b=100. y por supuesto la coordenada sería (0;100).

Orientar una recta por su pendiente, desarrolla las siguientes características:

Cuando la pendiente es cero:	La recta es horizontal
Cuando la pendiente es indefinida:	La recta es vertical
Cuando la pendiente es positiva:	La recta crece de izquierda a derecha
Cuando la pendiente es negativa:	La recta desciende de izquierda a derecha

6.8 Aplicaciones de la función lineal

La aplicación más importante es en el uso de ecuaciones, su representación en el plano carteciano conocidos los parámetros estudiados anteriormente.

6.8.1 La recta a partir de un punto y la pendiente

Se deben conocer la pendiente “m” y las coordenadas de un punto que pertenece a la recta. El modelo responde al siguiente:

$$(y - y_1) = m(x - x_1)$$

Encuentre la ecuación de la recta si se conoce la siguiente información:

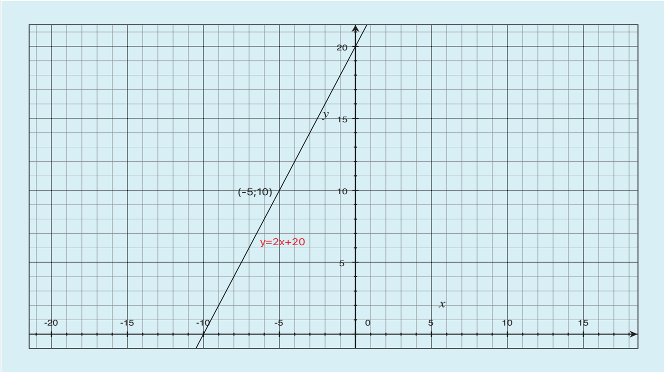
La recta cruza el punto A(-5;10)

La pendiente m = 2

La información corresponde a "punto pendiente"

$$(y - y_1) = m(x - x_1)$$
$$(y - 10) = 2(x + 5)$$
$$y - 10 = 2x + 10$$

$y = 2x + 20,$ Rta.



Revise y resuelva de la página 134 de su Texto básico, el Ejercicio 4.1, los ejercicios del 9 al 12.

6.8.2 La recta a partir de dos puntos

Se debe conocer las coordenadas de dos puntos que pertenecen a la recta, y aplicar el siguiente modelo:

$$(y - y_1) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

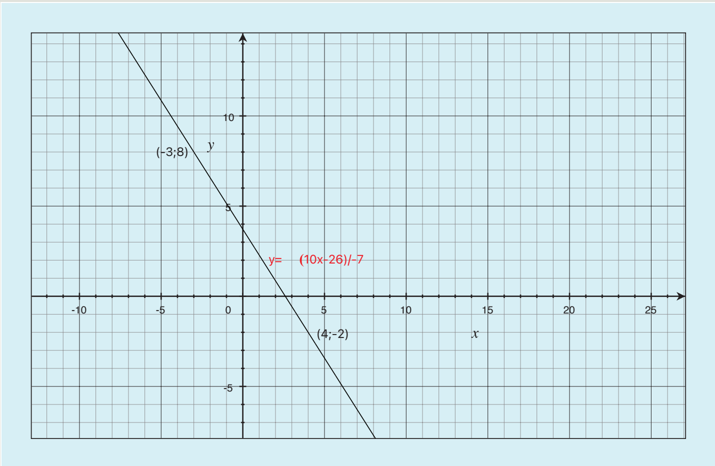
Encuentre la ecución de la recta si conoce la siguiente información:

La recta cruza los puntos A(-4;-2) y B(-3;8)

La información corresponse a "dos puntos"

$$(y - y_1) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$
$$(y + 2) = \frac{8 + 2}{-3 - 4}(x - 4)$$
$$y + 2 = \frac{10}{-7}(x - 4)$$
$$-7y - 14 = 10(x - 4)$$
$$-7y - 14 = 10x - 40$$

$y = \frac{10x - 26}{-7}$ Rta.



Revise y resuelva de la página 134 de su Texto básico, el Ejercicio 4.1, los ejercicios del 13 al 16.

6.8.3 La recta por ordenada en el origen

Toda recta en algún momento de su prolongación cruza o intersecta el ejer "y", y a esta altura se le denomina "ordenada en el origen", este valor se lo representa como "b", entonces implícitamente me dan las coordenadas de este punto que sería (0;b), adicionalmente viene la inclinación de la recta que como ya vimos en los modelos anteriores sería la pendiente de la recta. El modelo que a partir del punto pendiente se puede obtener y aplicar con la información mencionada es el siguiente:

$$y = mx + b$$

Encuentre la ecuación de la recta si conoce la siguiente información:

La recta intersecta el eje "y" en 6, es decir en el punto (0;6).

Tiene una pendiente de 3.

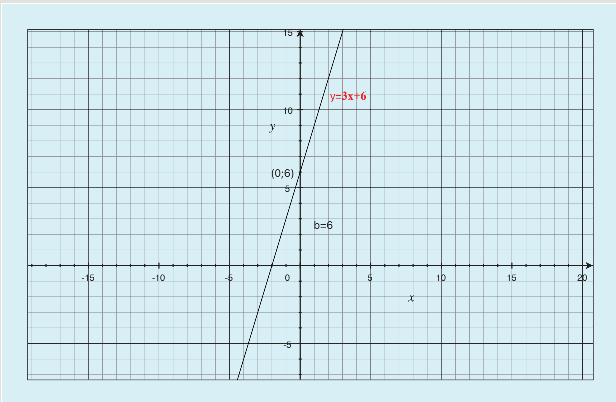
La información corresponse a "Ordenada en el origen"

$$y = mx + b$$

Reemplazamos datos:

$$y = 3x + 6$$

$y = 3x + 6$ Rta.



Revise y resuelva de la página 131 de su Texto básico, el Ejemplo 5, e intente graficar la recta.

Ejemplo 59

Encuentre la pendiente y la ordenada en el origen de la siguiente ecuación de la recta. $2x + 3y = 12$

A partir de la ecuación hay que obtener aplicando propiedades algébricas el modelo "ordenada en el origen" que es $y = mx + b$

$$3y = -2x + 12$$

Despeje "y"

$$y = \frac{-2x + 12}{3}$$

Separando en fracciones parciales, así:

$$y = \frac{-2x}{3} + \frac{12}{3}$$

Simplificando lo que se pueda:

$y = \frac{-2}{3}x + 4$, por lo tanto:

$$m = \frac{-2}{3}; \qquad b = 4, \qquad Rta.$$

Recuerde:
Si despeja "y "el coeficiente de "x" es la pendiente y el término independiente es la ordenada en el origen. Siempre se puede tener esta forma de ecuación.

Revise y resuelva de la página 141 de su Texto básico, el Ejercicio 4.2, los ejemplos del 1 al 4, e intente graficar la recta.

Se ha concluido el estudio de esta unidad, siempre le recomiendo revisar lo recomendado hasta que domine el tema en particular y detalles que usted confirma necesita mejorar y así conocer su nivel de conocimientos.

A continuación, le invito a desarrollar la siguiente autoevaluación, cuyo objetivo es conocer cuánto usted ha comprendido del tema, además podrá revisar en la sección del solucionario, la retroalimentación de cada pregunta.

Estoy seguro de que le irá ¡muy bien!

Autoevaluación 6.12

Lea y responda en el espacio entre paréntesis si es verdadera con "V" o falsa con "F".

1.-	( )	Dada la función $f(x) = 2x + 5$ la ordenada en el origen es "5".
2.-	( )	Si la pendiente m=4 y la recta pasa por el origen, la ecuación de la recta es: $y = 4x$
3.-	( )	Si una recta se inclina hacia la izquierda y desciende de izquierda a derecha, tiene pendiente positiva.
4.-	( )	Cuando la pendiente es cero, la recta es una vertical.
5.-	( )	La función $h(x) = x + 1, es\ una\ función\ lineal.$
6.-	( )	La función: $f(x) = 8 - x, tiene\ una\ pendiente\ igual\ a - 1$
7.-	( )	Si la recta pasa por los puntos A(0;2) y B(6;2), tiene una pendiente de cero.
8.-	( )	La pendiente de una recta es 2/5, quiere decir que sube 2 unidades y se desplaza 5 unidades horizontalmente.
9.-	( )	La pendiente de una recta es 1, quiere decir que sube 2 unidades verticalmente y se desplaza 2 unidades horizontalmente.
10.-	( )	A partir de m=1 y el punto (0;-6), la ecuación de la recta es: y=6+x.

Verifique sus respuestas en el solucionario al final de la presente guía didáctica.

"Todas las verdades de las matemáticas están vinculadas entre si"

Adrien-Marie Legendre

¡¡Éxitos en la tarea que ha emprendido!!

Ir al solucionario

Resultado de aprendizaje 13

De muestra conocimiento en metodologías y técnicas administrativas y financieras aprovechando recursos eficientemente. .

La semana será dedicada a la resolución de ecuaciones, que son aquellos modelos matemáticos mas cercanos a la realidad especialmente de orden dos o cuadráticas, deberá reconocer identificar y recordad las metodologías por factoreo y por fórmula general que le ayudarán a resolver y conseguir respuestas.

Interpretará con lógica matemática los valores obtenidos en las ecuaciones y su significado real, identificará además aquellas respuestas que no son reales o que se los domina imaginarias y mas que todo el significado real de estos valores.

Finalmente, a partir de éste conocimiento se podrá calcular o resolver una ecuación cuadrática de cualquier manera, y de hoy en adelante se podrá defender, inclusive por ensayo y error e identificará las respuestas hasta gráficamente, con lo que podrá proyectar la evolución de algún problema o avance de un proyecto.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje

Ecuación de segundo grado

Semana 13

Unidad 7 "Ecuaciones cuadráticas"

7 Ecuaciones y función cuadrática

En este tema, aprenderá el comportamiento de las ecuaciones de mayor grado que para esta asignatura veremos solo las de segundo grado y también su comportamiento con las propiedades y metodologías para encontrar un conjunto de valores que satisfagan una función cuadrática, recuerde aquí se utilizará la función cuyo modelo es:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Para continuar con lo aprendido en la semana 12, corresponde aprender la función de segundo grado.

7.1 Función cuadrática

La matemática define a la función de segundo grado como aquella que responde al modelo cuadrático en el que se tiene a, b y c, como constantes y "a" no debe ser cero: Fíjese:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Son funciones cuadráticas las siguientes:

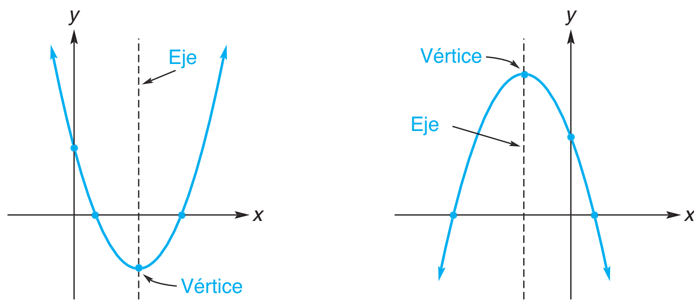
$f(x) = 2x^2 + 3x$
$\mathrm{g(x)}{=}{-}7x^2 - 2x - 8$
$v(x) = 5 + 5x^2$
$h(x) = \frac{1}{x^2} + 2x, NO\ ES\ FUNCIÓN\ CUADRÁTICA$

Recuerde:
Una función cuadrática responder a una función polinómica de grado dos.

La gráfica para una función cuadrática como lo vimos en el tema de funciones es una parábola, y esta curva se abra hacia arriba si $a > 0$, y tendría un punto mínimo llamado valle y es el vértice.

Si la parábola tiene un $a < 0$, la curva se abre hacia abajo y tendría un punto máximo llamado el pico de la función y es vértice también. Fíjese en las figuras:

Parábola: $y = f(x) = ax^2 + bx + c$



$a > 0$, abre hacia arriba
(a)

$a < 0$, abre hacia abajo
(b)

La línea vertical que divide en dos partes iguales se denomina "**eje vertical**" y es útil porque sobre esta vertical se encuentra el vértice de la parábola que se lo encuentra con la expresión:

$$V\acute{e}rtice\ es\ \left(-\frac{b}{2a}; f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$$

En "c" se produce la intersección con el eje "y"

Ejemplo 60

Encuentre la gráfica correspondiente a la función:

$f(x) = x^2$+7x+12

La funcióon según el modelo tiene: a=1, b=7 y c=12

Como a es mayor que cero, la parábola se abrirá hacia arriba y tiene un punto mínimo cuyas coordenadas se calculan de la siguiente forma:

Cálculo del Vértice

$-\frac{b}{2a} = -\frac{7}{2*1} = -3{,}5$, este valor es la coordenada en "x" del vértice

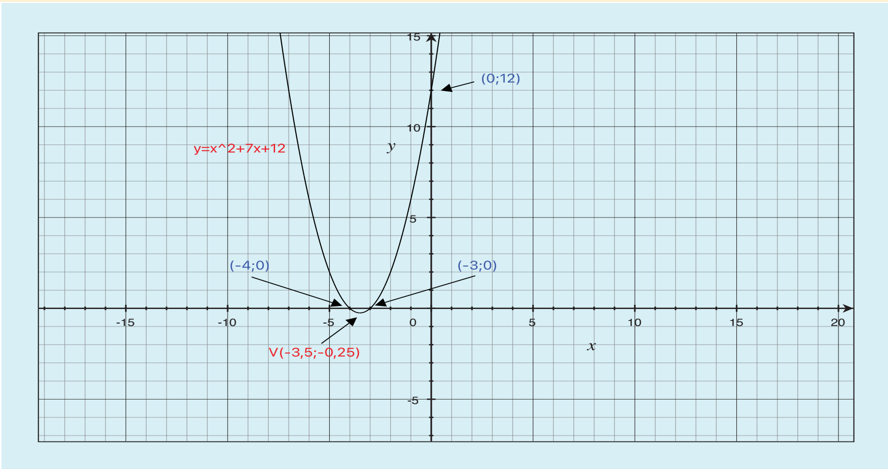
Con este valor de "x", probemos el valor de la función, así:

$f(x) = x^2$+7x+12

$f(-3{,}5) = -3{,}5^2$+7(-3,5)+12=12,25-24,5+12= - 0,25, que es la coordenada en "y" del vértice, así:

$$\boldsymbol{Vertice}(-3,5;-0,25)$$

Esquematizemos la parábola:



Recuerde:
Siempre se pueden evaluar mas valores de "x" en la función cuadrática y obtener puntos que dibujan y corresponden a la parábola.

Revise y resuelva de la página 149 de su Texto básico, el Ejercicio 4.3, los ejemplos del 13 al 21.

7.2 Aplicaciones de la función cuadrática

Con la función cuadrática se pueden operar un sinnúmero de aplicaciones, son ejemplos muy comunes la productividad de una empresa, a partir de una función de demanda o de oferta se relacionan esas funciones con la productividad y se obtiene un modelo cuadrático que es de fácil aplicación en la mayoría de negocios.

el siguiente ejemplo le ayudará a ser un emprendedor:

Una empresa que fabrica bicicletas tiene una función de demanda y es:

$$p = 1000 - 2q$$

Donde "p" es el precio de cada bicicleta en dolares, y;

"q", es la cantidad de bicicletas que se venden por semana.

Se encontrará la producción máxima y el ingreso para ese caso máximo.

La función de ingreso será: $i = f(q)$. Es conocido que el ingreso total es:

$$ingreso = presio * cantidad$$

$$i = pq$$

Si remplazamos el valor de "p", para que todo se presente en función de "q", tendrá:

$$i = pq$$

$$i = (1000 - 2q)q$$

$$i = 1000q - 2q^2$$

Se ha conseguido una función cuadrática, en la cual a=-2, b=1000, y c= 0.

Aprendió que esta parábola se abre hacia abajo, es decir que mostrará un punto pico o alto que para el ejemplo será entonces el valor máximo,

Para lo cual calculamos las coordenadas del vértice como ya se ha hecho: así:

Calulo del Vértice

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{1000}{2 * -2} = 250$$

Encontramos el valor de "-250" en la función "i", para encontrar la otra coordenada:

$$i(q) = 1000q - 2q^2$$

$i(-250) = 1000(250) - 2(250)^2$=125.000

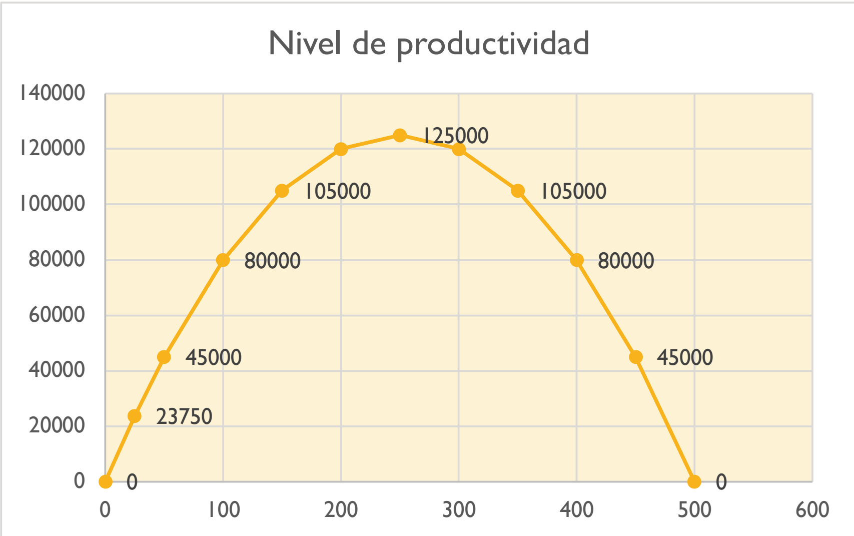
El vértice o punto máximo se ubica en:

(250 ; 125000)

Interpretando la respuesta del vertice, deberá comprender que el máximo nivel de producción ocurre cuando el ingreso es de $125.000.oo, y cuando se han vendido 250 bicicletas en la semana.

La gráfica es mas expresiva, si le damos valores a “q”, fíjese:

q	0	25	50	100	150	200	250	300	350	400	450	500
i	0	23750	45000	80000	105000	120000	125000	120000	105000	80000	45000	0



El valor más alto es de $125.000, cuando se venden 250 unidades.

Revise y resuelva de la página 150 de su Texto básico, el Ejercicio 4.3, los ejemplos del 15 al 20 y del 23 al 26.

Se ha concluido el estudio de esta unidad, siempre le recomiendo revisar lo recomendado hasta que domine el tema en particular y detalles que usted confirma necesita mejorar y así conocer su nivel de conocimientos.

A continuación, le invito a desarrollar la siguiente autoevaluación, cuyo objetivo es conocer cuánto usted ha comprendido del tema, además podrá revisar en la sección del solucionario, la retroalimentación de cada pregunta.

Estoy seguro de que le irá ¡muy bien!

Autoevaluación 7.13

Lea y responda en el espacio entre paréntesis si es verdadera con "V" o falsa con "F".

1.-	( )	Dada la función $f(x) = x^2 + x - 5$ la gráfica se abre hacia arriba y corta el eje "y" en la coordenada (0; - 5).
2.-	( )	La gráfica de la siguiente función: $f(x) = (x-2)(x-4)$ intersecta el eje "x" en $(0; 2)\ y\ en\ (0; 4)$.
3.-	( )	Si existe un punto mínimo en las coordenadas $(0; 0)$, la función es: $f(x) = x^2$
4.-	( )	La coordenada "x" del vértice de una parábola se calcula con: $-\frac{b}{2a}$.
5.-	( )	Dada la función $f(x) = x^2 - 2x$, la coordenada en "x" del vértice es: "1"

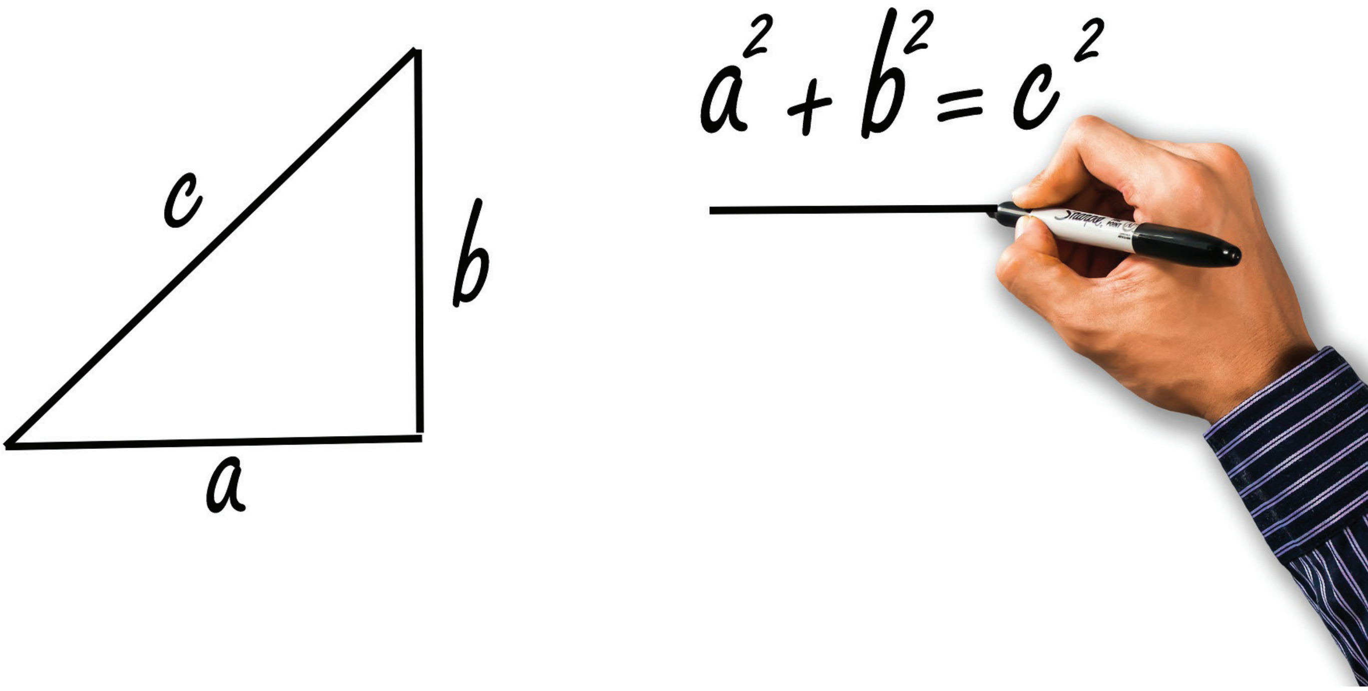
Verifique sus respuestas en el solucionario al final de la presente guía didáctica.

"Los matemáticos han alcanzado lo más alto del pensamiento humano"

Havelock Ellis

¡¡Éxitos en la tarea que ha emprendido!!

Ir al solucionario



Resultado de aprendizaje 14

Utiliza la abstracción como una habilidad adquirida para sintetizar y analizar situaciones propuestas que pueden ser modeladas matemáticamente. .

La siguiente semana aprenderá a reconocer una función exponencial y la aplicación de modelos reales que las utilizará en matemática financiera por ejemplo y en otros modelos de la vida real.

Podrá detectar como vertiginosamente un modelo matemático exponencial expresa subida de valores o de resultados de manera violenta, empleará el método de ensayo y error, graficará y analizará la gráfica, reconocerá la figura que dibuja la función exponencial y detectará puntos notables y de intersección para partir de valores mínimos.

Es importante que en esta semana llegue a reconocer las diferencias y las propiedades que poseen cada función hasta el momento estudiadas.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje

Semana 14

7.3 Función exponencial

Una función exponencial se caracteriza por tener a la variable independiente en el lugar del exponente, es decir que puede conformar una ecuación exponencial porque la incógnita es un exponente.

Una metodología amigable para detectar que gráfica arroja una función exponencial es el de ensayo y error, esto significa que asigne valores a la variable "x" que arroje salidas de "y" constituyenco un par ordena o coordenada cuyos puntos deberán ser representados.

Las funciones exponenciales tienen desenlaces vertiginosos, pueden tener incrementos muy rápidos en poco dezplazamiento y a si mismo decrementos significativos. La función exponencial responde al siguiente modelo:

$$f(x) = a^x, \text{ donde: } a > 0 \; y \; a \neq 1$$

Las reglas de los exponentes son recursos muy útiles para resolver una función exponencial, le recuerdo que esas propiedades son:

Reglas de los exponentes

1. $a^m a^n = a^{m+n}$.

2. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.

3. $(a^m)^n = a^{mn}$.

4. $(ab)^n = a^n b^n$.

5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$.

6. $a^1 = a$.

7. $a^0 = 1$.

8. $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.

Figura . Regla de los exponentes:

Nota Fuente. Haeussler, E. ; Richard, P. y Richard, W., (2015). Matemáticas para Administración y Economía.

Las propiedades de la función exponencial son:

1.- El dominio de la función exponencial son todos los números reales.

2.- El rango o recorrido son todos los números positivos.

3.- La gráfica exponencial tiene una intersección en el eje “y” en la coordenada (0;1)

4.- La gráfica exponencial no tiene intersección en el eje “x”.

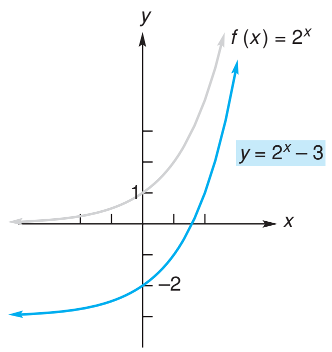
6.- Si la función es: $f(x) = a^x$, y $a > 1$, la gráfica asciende de izquierda a derecha.

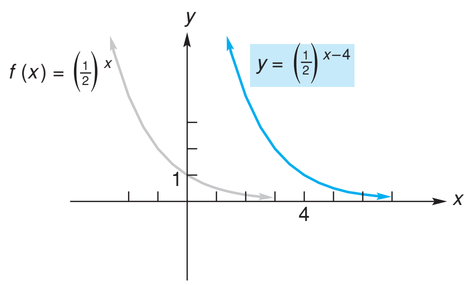
7.- Si la función es: $f(x) = a^x$, y $0 < a < 1$, la gráfica desciende de izquierda a derecha.

6.- Si la función es: $f(x) = a^x$, y $a > 1$, la gráfica se aproxima al eje “x” conforme x, toma valores negativos cada vez mayores en valor absoluto.

6.- Si la función es: $f(x) = a^x$, y $00 < a < 1$, la gráfica se aproxima al eje “x” conforme x toma valores positivos cada vez mayores o grandes.

Las siguientes son modelos de gráficas de funciones exponenciales:





Para el siguiente ejemplo, $f(x) = 4^x$, grafique la función y determine sus propiedades:

Como obserba, la vriable independiente ocupa el lugar del exponente, eso le da la característica de función exponencial. A partir de otorgaar valores a “x” y obtener valores de la función, determinamos la siguiente tabla:

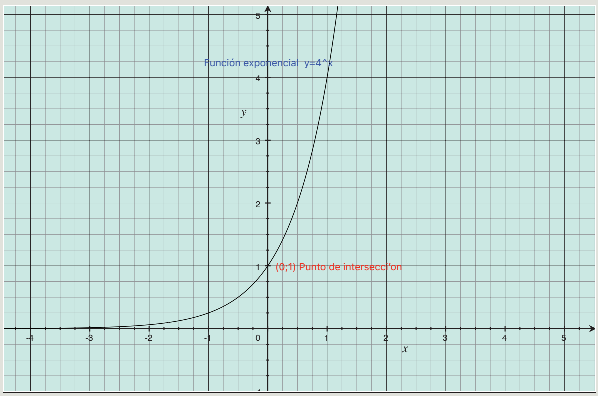
x	-4	-2	-1	0	1	2	3
$f(x) = 4^x$	0,004	0,06	0,25	1	4	16	64

El dominio de la función son todos los reales, es decir cualquier valor puede tomar “x”.

El rango o recorrido son los números positivos, es decir que “y” siempre será positivo.

Punto de intersección cuando x=o, cuyo resultado es “1”, es decir coordenada (0;1)

Los valores negtivos asignados no logran alcanzar el eje “x”, a esto se lo llama asintótico.
Es decir los valores de salida “y” son positivos y mayores que cero.



Recuerde:
Siempre se pueden evaluar mas valores de “x” en la función, pero al ser exponencial sería imposible representarla.

Revise y resuelva de la página 192 de su Texto básico, el Ejercicio 5.1, los ejemplos del 1 al 12.

7.4 Aplicaciones de la función exponencial

Una aplicación muy común es la capitalización de inversiones mediante tasas de intrés compuesta o que responden al modelo:

$$M = C(1 + i)^n$$

Donde:

M = Monto o capital mas intereses, ganados o pagados em um período de tempo a uma tasa de interés compuesta.

C = Capital o inversión o pago inicial.

n = Número de períodos o plazo al cual se coloca el capital.

i = Tasa de interés em general em %, que debe ser convertida a tanto por uno.

Ejemplo 61

Encuentre el Monto o valor final de una inversión iniclal de \$1000.oo, colocada a difetenres plazos hasta 10 años a una tasa de interés del 5% anual. El modelo es similar a:

$$f(x) = a^x$$

Para nuestro caso sería entonces:

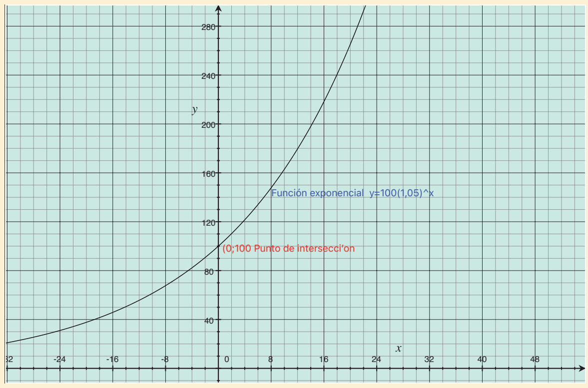
$$M = C(1+i)^t$$

$$M = 1000(1+0.05)^t$$

$$M = 1000(1{,}05)^t$$

La tabla tiene valores calculados para ver el comportamiento de la función como exponencial

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
M(t)	100,00	105,00	110,25	115,76	121,55	127,63	134,01	140,71	147,75	155,13	162,89



Para el valor equivalente en el año 10, el monto es de \$162,89

Revise y resuelva de la página 188 de su Texto básico, el Ejemplo 6 y de la página 193 el numeral 29 (Inversión).

7.5 Ecuaciones exponenciales básicas

Una ecuación exponencial, tiene la incógnita ubicada en el exponente y por principio el signo de la igualdad hacia un término o el cero. Son ejemplos los siguientes:

$$2^x = 64$$

$$12^{(x+1)} = 3$$

$$5^{(1-x)} = 2^{x^2+x}$$

$$(a-1)^{x+2}(a-2)^x = a^x$$

La solución de una ecuación exponencial se logra despejando la incógnita "x", para lo cual debemos bajar de la posición de exponente a la ubicación de un coeficiente y la única manera de lograrlo es utilizando la teoría de los logaritmos. A continuación, tienes las propiedades de los logaritmos útiles para solucionar ecuaciones exponenciales.

Propiedades de los logaritmos	
$\log ab$	$\log a + \log b$
$\log \frac{a}{b}$	$\log a - \log b$
$\log a^x$	$x\log a$
$\log 1$	cero
$\log 0$	No esta definido

Existen dos tipos de logaritmos y son aquellos en base "10" y en base "e" :

Base "10" logaritmo vulgar:

$$\log_{10} a = \log a$$

Base "e" y (e=2,7182818281828), se escribe como:

$$\log_e a = \ln a$$

Ejemplo 62

Resuelva lal siguiene euaión. $6^{3x-4} = 36^{x+2}$

Puede apreciar que los exponentes llevan implícita una ecuación. trabaje en las bases para simplificar el ejercicio, de la siguiente manera:

$$6^{3x-4} = 6^{2(x+2)}$$

El probocar tener las mismas bases ayuda que conformemos una ecuación solo con los exponentes y procedemos resolver como si fuera una ecuación de primer grado.

Si las bases son iguales, los emponentes también deben ser iguales, asi:

$$3x - 4 = 2(x + 2)$$
$$3x - 4 = 2x + 4$$
$$3x - 2x = 4 + 4$$
$$x = 8, \quad \text{Rta.}$$

Ejemplo 63

Resuelva lal siguiene euaión. $3 * 4^{x-1} = 7$

Puede apreciar que los exponentes llevan implícita una ecuación.

$$4^{x-1} = \frac{7}{3}$$

Deje el miembro que tiene la incógnita a la izquirda para poder tomar logaaritmos.

$$\log 4^{x-1} = \log \frac{7}{3}$$

Utilice la propiedad de los logaritmos, por la cual el exponente pasa ha ser coeficiente, y el logaritmo de una división de la siguiente manera:

$$(x - 1)\log 4 = \log 7 - \log 3$$

Quèdese con el factor que contiene la incógnita, asi:

$$(x - 1) = \frac{\log 7 - \log 3}{\log 4}$$

$$x = \frac{\log 7 - \log 3}{\log 4} + 1$$

$$x = \frac{0{,}845098 - 0{,}477121}{0{,}602059} + 1$$

$$x = 0{,}611197 + 1$$

$$\mathbf{x = 1{,}8111} \quad \textbf{Rta.}$$

Recuerde:
No siempre en las ecuaciones exponenciales se obtienen valores enteros.

Revise y resuelva de la página 212 de su Texto básico, el Ejemplo 4, que trata de la Ecuación de demanda.

7.6 La función logarítmica

Una función logarítmica tiene como protagonismo al logaritmo, entonces debemos comprender primero su definición que es o que son los logaritmos, le expongo la siguiente:

"Es el exponente al que hay que elevar una base para obtener el número"

$$y = \log_b x,$$
$$b^y = x,$$

Para dominar este acertijo practique la conversión de una ecuación exponencial a una logarítmica y viceversa. Fíjese en los siguientes ejemplos:

Convertir si es exponencial a logarítmica o logarítmica a exponencial.

$\log_2 16 = 4$	$2^4 = 16$
$2^5 = 32$	$\log_2 32 = 5$
$100^0 = 1$	$\log_{100} 1 = 0$
$\log_{(a+1)} x = 5$	$(a+1)^5 = x$

La siguiente es la gráfica típica de la función logarítmica.

x	y
$\frac{1}{4}$	-2
$\frac{1}{2}$	-1
1	0
2	1
4	2
8	3

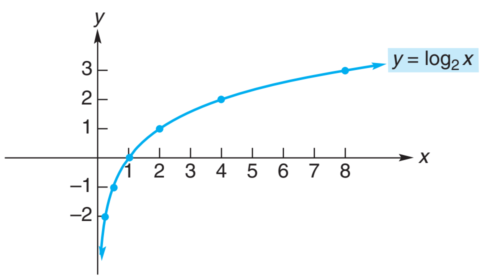


Figura . Función logarítmica:

Nota Fuente. Haeussler, E. ; Richard, P. y Richard, W., (2015). Matemáticas para Administración y Economía.

Como se puede observar las siguientes características:

El dominio son todos los números positivos

Los valores de "x" entre cero y uno, arrojan logaritmos negativos.

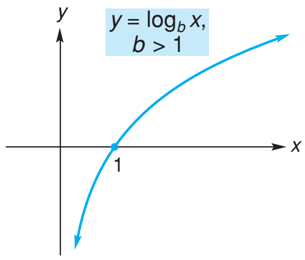
Cuando el valor de "x" es "1", el logaritmo es cero.

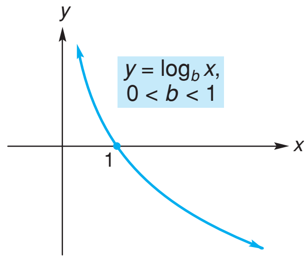
El recorrido o rango son todos los números reales.

Los valores negativos del logaritmo entre cero y uno, van hacia el infinito y es asintótico.

La grafica crece de izquierda a derecha.

Las modalidades de una función logarítmica son las que se expresan:





7.7 Propiedades de la función logaritmo

El dominio es el intervalo $(0; \infty)$

No existe logaritmo de números enteros negativos y tampoco del cero

El recorrido o rango se cumple en el intervalo $(-\infty: \infty)$

Cero es el valor del logaritmo de "1".

La coordenada de la intersección ocurre en: $(1; 0)$.

7.8 Aplicación de la función logaritmo

Existen muchas aplicaciones de la función logarítmica, especialmente en crecimientos y decaimientos de bacterias o virus, se aplica mucho en ingeniería ambiental y en biotecnología.

Para la aplicación nuestra tomaremos un ejemplo de aplicación de la cantidad de radiación que va quedando en un organismo radiado solarmente.

Estudiemos la degeneración radioactiva a la que está expuesta una persona:

Se conoce que la ecuación siguiente determina la cantidad de radiación en el tiempo, así:

$$C = C_0 e^{-\lambda t}$$

Donde C es la cantidad perdida de radiación en un tiempo "t"

C_0 es la cantidad inicial de radiación entregada.

λ es la constante de degeneración obtenido en laboratorio y de la literatura científica.

t, es el tiempo, que es la variable independiente.

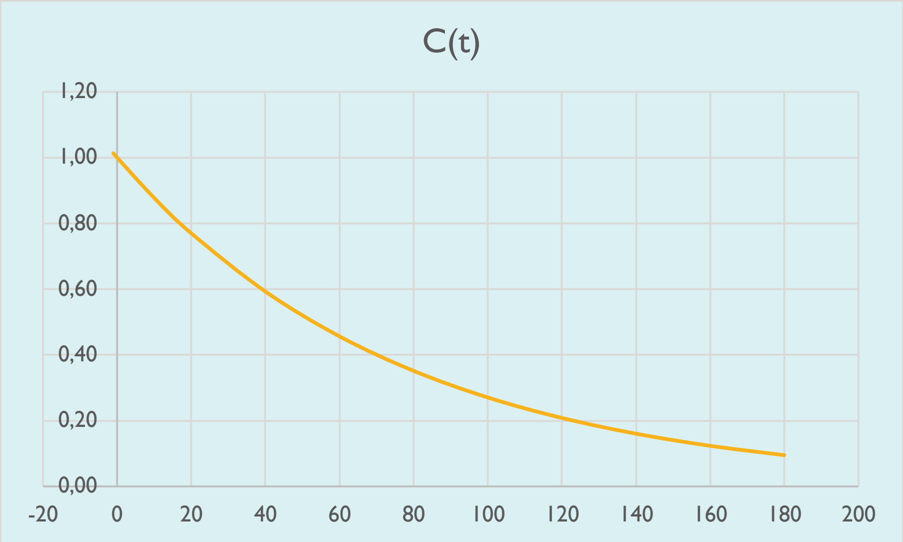
El ejemplo dirá que se tiene 5 miligramos de Po (polonio), con una constante de decaimiento $\lambda = -0{,}00501\ mg/dia$, grafique la gráfica y sus características:

$$\boldsymbol{C = 5e^{-0{,}00501t}}$$

La mejor manera es por ensayo y error, conformemos una tabla de valores, asï:

t	-1	0	10	20	40	60	80	100	120	140	160	180
C(t)	1,01	1,00	0,88	0,77	0,59	0,46	0,35	0,27	0,21	0,16	0,12	0,10

Representando la función se tiene:



La curva señala como se va decayendo en días, los 5 mg de Polonio.

Revise y resuelva de la página 201 de su Texto básico, el Ejercicio 5,2 los ejercicios del 29 al 46.

Se ha concluido el estudio de esta unidad, siempre le recomiendo revisar lo recomendado hasta que domine el tema en particular y detalles que usted confirma necesita mejorar y así conocer su nivel de conocimientos.

A continuación, le invito a desarrollar la siguiente autoevaluación, cuyo objetivo es conocer cuánto usted ha comprendido del tema, además podrá revisar en la sección del solucionario, la retroalimentación de cada pregunta.

Estoy seguro de que le irá ¡muy bien!

Autoevaluación 7.14

Lea y responda en el espacio entre paréntesis si es verdadera con "V" o falsa con "F".

1.-	( )	La expresión $\log 2x = \log 2 + \log x$
2.-	( )	Al resolver la ecuación: $a^{x+2} = a^8$,, x es igual a 6
3.-	( )	Si la función $f(x) = x^2$, tiene como vértice el punto (0;0)
4.-	( )	Al resolver la ecuación: $(a * b)^{x-2} = 1$, x es igual a 2
5.-	( )	Dada la función $f(x) = x^2 - 2x$, la coordenada en "x" del vértice es: "1"
6.-	( )	La función logaritmo, siempre corta al eje "x" en la coordenada (1;0)
7.-	( )	La expresión: $\log_a(2 - x) = 3$, es equivalente a: $a^3 = (2 - x)$
8.-	( )	La expresión: $a^x = 2$, es equivalente a: $\log_a 2 = x$
9.-	( )	El logaritmo de una potencia es el exponente por el logaritmo de la base.
10.-	( )	La ecuación: $\log 2 + \log x = 1$,tiene por respuesta a x=5

Verifique sus respuestas en el solucionario al final de la presente guía didáctica.

"Las matemáticas puras son, en su forma, la poesía de las ideas lógicas"

Albert Einstein

¡¡Éxitos en la tarea que ha emprendido!!

Ir al solucionario

Resultado de aprendizaje 15

Demuestra conocimiento en metodologías y técnicas administrativas y financieras aprovechando recursos eficientemente. .

La siguiente semana es dedicada a las finanzas, la administración y la economía, se logrará reconocer los conceptos establecidos para este tema como el valor actual, el valor futuro, las tasas de interés los tipos y la forma de pago y en especial los tiempos o plazos.

El tema le ayudará para aplicar a inversiones o a préstamos que una entidad financiera le proporciona y aprenderá como funciona las finanzas y como la matemática le brinda la ayuda y el conocimiento para que pueda proyectar o financiar un delante de dinero o un préstamo o una hoja de amortización.

Dominará a convertir las unidades temporales, los períodos de capitalización y los sabrá aplicar de manera inmediata en su diario vivir.

Al final el tema se presta para diseñar situaciones compuestas que requerirán un poco mas de conocimiento a partir de las bses que lleva en este capítulo en especial.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje

Matemática financiera

Semana 15

Unidad 8 “Matemáticas financieras”

8 Matemática Financiera

8.1 Matemática para finanzas

Es interesante saber que ciertos artículos, bienes inmuebles o bienes muebles se pueden adquirir y que siempre es posible pagar los valores que correspondan por estos aspectos. Para eso surge el financiamiento monetario, e involucra a la matemática para amortizar una deuda o ganar un interés. La comprensión de las matemáticas financieras puede favorecer al cliente o al consumidor tomas decisiones con conveniencia en cuanto a gastos o inversiones bancarias.

Como todo servicio tiene un costo, de igual manera el dinero que es el recurso en transacción vale lo que una tasa de interés lo designe. A continuación, las definiciones:

8.2 Interés compuesto

Es enfrentar el tema del valor del dinero en el tiempo cuando se generan inversiones, préstamos etc. La tasa de interés que capitaliza inmediatamente cumplido el período que conforma un nuevo capital, que entra a ganar interés con un capital inicial mayor.

Para un capital inicial y en la espera de recibir un incremento conforme a la tasa de interés que generará una ganancia o interés mas el monto o capital final, lo expresa la siguiente fórmula:

$$VF = VP(1 + i)^n$$

Donde:

VF= Valor final o monto.
VP= Valor presente o capital inicial.
i= Tasa de interés compuesto
n= Número de períodos o prazo

La tasa de interés generalmente se expressa anualmente al igual que la capitalización, pero si no es el caso se puede ayudar con la siguiente expresión que permite cambiar la tasa a mensual, diaria etc etc, de la siguiente manera.

$$\left(1+\frac{i}{n}\right)^n = \left(1+\frac{j}{m}\right)^m . .$$

Esta ecuación le permite encontrar tasas equivalentes en diferentes plazos de capitalización, un ejemplo es el siguiente:

Ejemplo 64

Encuentre la tasa equivalente con capitalización trimestral a una opoeración financiera que ejecuta una capitalización anual del 12%. Partiendo de la ecuaciòn:

$$\left(1+\frac{i}{n}\right)^n = \left(1+\frac{j}{m}\right)^m$$

Encontremos el valor de "j" y convierta la tasa en por ciento a tanto por uno. Entonces los datos son:

$i = 12\% = 0{,}12$

$n = 1\, período = 1\, año$

$m = 4\, períodos = trimestres\ en\ el\ año.$

$j = incógnita$

$$\left(1+\frac{0{,}12}{1}\right)^1 = \left(1+\frac{j}{4}\right)^4$$

$$(1+0{,}12)^1 = \left(1+\frac{j}{4}\right)^4$$

Extrayendo la raiz cuarta en ambos lados de la ecuaciòn:

$$\sqrt[4]{1{,}12} = \left(1+\frac{j}{4}\right)$$

$$0{,}028 = \frac{j}{4}$$

$$j = 0{,}1149$$

$$\mathbf{j = 11,49\%} \quad \textbf{Rta}.$$

Es decir el 11,49% capitalizado trimestralmente es equivalente al 12 % capitalizado anualmente.

Ejemplo 65

Encuentre el monto de $1600.oo depositada al 8% anual, a 10 años.

$$VF = VP(1+i)^n$$

Datos:

$i = 8\% = 0,08$

$n = 10\ año$

$VP = \$1600, oo$

$VF = incógnita.$

$$VF = VP(1+i)^n$$

$$VF = 1600(1+0,08)^{10}$$

$$VF = 1600(1,08)^{10}$$

$$VF = 1600(2,158924)$$

$$\boldsymbol{VF = \$3.454,28, \quad Rta.}$$

Es decir al final del décimo año, la inversión de $1600,oo depositados al 8% anual, se convierte en $3.454,28 dólares.

Ejemplo 66

Encuentre el plazo al que hay que dejar un capital de $10.000.oo depositado al 5%, capitalizado semestralmente, para obtener $30.000,oo.

$$VF = VP(1+i)^n$$

La ecuación del interés compuesto es perfectamente aplicable solo tome en cuenta que la respuesta saldrá en semestres.

Datos:

$i = 5\% = 0,05$

$n = incógnita$

$VP = \$10.000, oo$

$VF = \$30.000, oo.$

$$VF = VP(1+i)^n$$

$$30.000 = 10.000(1+0,05)^n$$

$$3 = (1,05)^n$$

$$\log 3 = n \log 1,05$$

$$n = \frac{\log 3}{\log 1,05}.$$

$$n = \frac{0,47712}{0,02118} = 22,52\ semestres$$

$$\boldsymbol{n = 11,26\ años \quad Rta}$$

Es decir al final de 11,26 años, la inversión de \$10.000,oo depositados al 5% capitalizado semestralmente, se convierte en \$30.000,00 dólares.

8.3 Valor presente

Calcular un valor presente es actualizar una deuda o una inversión, podemos utilizar la misma ecuación del interés compuesto y simplemente despejar "VP".

El siguiente ejemplo es una aplicación práctica:

Ejemplo 67

Encuentre el valor presente que se debe depositar hoy, para obtener al final de 5 años \$20.000,oo, a una tasa del 12% capitalizable anualmente.

$$VF = VP(1+i)^n$$

La ecuación del interés compuesto es perfectamente aplicable

Datos:	$VF = VP(1+i)^n$
$i = 12\% = 0{,}12$	$20.000 = VP(1+0{,}12)^5$
$n = 5\ años$	$VP = \dfrac{20.000}{1{,}12^5}$
$VP = x$	$VP = \dfrac{20.000}{1{,}7623}$
$VF = 2x.$	$VP = 11.348{,}80$
	$\boldsymbol{VP = \$11.348,80 \quad Rta}$

Es decir si invierto \$11.348,80, depositados al 12% capitalizado anualmente, se convertirá en \$20.000,00 dólares en 5 años.

Recuerde

Las unidades temporales de la tasa deben ser las mismas de los períodos.

Revise y resuelva de la página 369 de su Texto básico, el Ejemplo 2, y los ejercicios del 13 al 17 de la página 372.

Revise y resuelva de la página 377 de su Texto básico, el Ejercicio 8,2, los ejercicios del 11 al 18.

8.4 Anualidades

El término “anualidad” se consibe como una Renta que recibe o se paga anualmente, pero podría ser semestralmente y sería una semestralidad o cada mes y sería una mensualidad. Las anualidades no son siempre cada año por lo que debería llamarse simplemente Renta.

La matemática financiera tiene fórmulas ya demostradas para calcular una renta con diferente nivel de capitalización, se requiere de una tasa de interés y del número de períodos, así como un valor futuro o en su defecto la renta.

Una aplicación directa de esta teoría es las populares tablas de amortización, que son rentas a pagar por un largo período de tiempo, contratdas o acordades con anticipación.

8.4.1 Anualidades vencidas

Aquellas que se ejecutan a período vencido es decir que hay que espear el final del período para que se se paguen o reciban. Se concideran capitalizables. y sus ecuaciones son:

Anualidades vencidas	
Valor futuro	$VF = \frac{R[(1+i)^n - 1]}{i}$
Valor presente	$VA = \frac{R[1-(1+i)^{-n}]}{i}$
Renta	$R = \frac{VF * i}{(1+i)^n - 1}$
	$R = \frac{VA * i}{1-(1+i)^{-n}}$
Períodos	$n = \frac{\log\left[\left(\frac{VF}{R}+1\right) * i\right]}{\log(1+i)} - 1$
	$n = -\frac{\log\left[1-\left(\frac{VA}{R}-1\right) * I\right]}{\log(1+i)} - 1$

8.4.2 Anualidades anticipadas

Aquellas que se ejecutan a período anticipado es decir que se paga o recibe, el mismo instante en que se inicia el período. Se concideran actualizables. y sus ecuaciones son:

Anualidades anticipadas	
Valor futuro	$VF = R\left[\frac{(1+i)^{n+1}}{i} - 1\right]$
Valor presente	$VA = R\left[\frac{1-(1+i)^{-(n-1)}}{i} + 1\right]$
Renta	$R = \frac{VF}{\frac{(1+i)^{n+1}-1}{i} - 1}$
	$R = \frac{VA}{\frac{1-(1+i)^{-(n-1)}}{i} + 1}$
Períodos	$n = \frac{\log\left[\left(\frac{VF}{R}+1\right) * i\right]}{\log(1+i)} - 1$
	$n = -\frac{\log\left[1-\left(\frac{VA}{R}-1\right) * I\right]}{\log(1+i)} - 1$

Para el cáluco de la tasa de una renta, que no son muy cambiantes pues generalmente las fija la autoridad financiera de un país, se puede recurrir al excell en el comando TASA.

Ejemplo 68

Encuentre el valor presente de una renta de $100,oo cada fin de mes durante 3 años a un interés del 6% compuesto mensual.

$$VA = \frac{R[1-(1+i)^{-n}]}{i}$$

La ecuación aplicable es para el valor presente a partir de una renta vencida, además hay que convertir los 3 años a meses para que las unidades temporales sean las mismas (meses).

Datos:

$i = 6\% = 0{,}06\ mensual$

$n = 3\ años = 36\ meses$

$VP = incógnita$

$R = \$100,oo.$

$$VA = \frac{R[1-(1+i)^{-n}]}{i}$$

$$VA = \frac{100[1-(1+0{,}06)^{-36}]}{0{,}06}$$

$$VA = \frac{100[1-0{,}12274]}{0{,}06}$$

$$VA = \frac{100[0{,}88]}{0{,}06}$$

$$VA = 1.462{,}10$$

$$\boldsymbol{VA = \$1.462,10 \quad Rta}$$

Es decir que liquidar hoy el valor de \$1.462,10, al 6% capitalizado mensualmente, equivale a acumular \$100.oo cada fin de mes durante 3 años.

Ejemplo 69

Encuentre el valor de la Renta anual que hay que cancelar por una deuda de \$10.000,oo contratada al 6% compuesto anual, duarnte 4 años..

$$R = \frac{VF * i}{(1+i)^n - 1} =$$

La ecuación aplicable es para la Renta vencida a pagar por un valor futuro, además no hay que convertir nada pues los 4 años y la tasa de interés del 6% es compueta anaulmente, es decir las unidades temporales son las mismas (años).

Datos:

$i = 6\% = 0{,}06\ anual$

$n = 4\ años$

$VP = \$10.000,oo$

$R = incógnita.$

$$R = \frac{VF * i}{(1+i)^n - 1} =$$

$$R = \frac{10.000 * 0{,}06}{(1+0{,}06)^4 - 1}$$

$$\mathrm{R} = \frac{600}{1{,}26 - 1}$$

$$\mathrm{R} = \frac{600}{0{,}26}$$

$$R = 2.307{,}70$$

$$\boldsymbol{R = \$2.307,70 \quad Rta}$$

Es decir que pagar \$2.307,70 al final de cada año a una tasa compuesta anual del 6%, terminará liquidando \$10.000.oo durante 4 años.

Revise y resuelva de la página 386 de su Texto básico, el Ejercicio 8,3, los numerales 13, 16, 17, 18, 20 y 22.

8.5 Amortización de préstamos

Los fondos de amortización son pagos periódicos que se ejecutan para finalizar una obligación financiera futura.

Un ejemplo práctico es si usted compra un automòvil que cuesta $17.000,oo que será reemplazao después de 15 años, año en el que tendrá un valor de $8.000,oo, Para poder dismoner de dinero para este acontecimiento y poder comprar otro nuevo automóvil, se establece un fondo de amortización. La cantidad en este fondo es la diferencia entre el valor original y el valor de sesecho o actual, entonces si se depocitan pagos iguales al final de cada trimestre al 8% compuesto trimestralmente, cual debería ser la renta.

Estos serían los datos para la ecuación de Renta en función del valor futuro con pagos vencidos, lo explica el ejemplo 70:

Ejemplo 70

Encuentre el valor de la Renta trimestral para un fondo de amortización que reponga un automovil cuyo valor inicial fue de $17.000,oo y despues de 15 años cuesta $8.000.oo. Si se pagan trimestralmente cuotas al 8% compuesto trimestralmente.

$$R = \frac{VF * i}{(1+i)^n - 1} =$$

La ecuación aplicable es para la Renta vencida a pagar por un valor futuro, además hay que convertir los 15 años a trimestres y la tasa de interés tambien del 8% que es compueta anaulmente, es decir las unidades temporales deben ser las mismas (trimestres).

Datos:

$$R = \frac{VF * i}{(1+i)^n - 1} =$$

$$i = 8\% = \frac{0{,}08}{4} = 0{,}02\ trimestral$$

$$R = \frac{9.000 * 0{,}02}{(1+0{,}02)^{60} - 1}$$

$n = 15 \text{ años} = 15(4)$

$= 60 \text{ trmestres}$

$VP = \$17.000 - 8.000 = \$9.000$

$R = \text{incógnita.}$

$$R = \frac{180}{3{,}28 - 1}$$

$$R = \frac{180}{2{,}28}$$

$$R = 78{,}95$$

$$\boldsymbol{R = \$78{,}95 \quad Rta}$$

Es decir que pagar 60 cuotas de \$78,95 al final de cada trimestre a una tasa compuesta anual del 8%, terminará liquidando \$9.000.oo que sería el costo actual del automóvil..

Revise y resuelva de la página 387 de su Texto básico, el Ejercicio 8,3, los numerales 31 y 33.

Se ha concluido el estudio de esta unidad, siempre le recomiendo revisar lo recomendado hasta que domine el tema en particular y detalles que usted confirma necesita mejorar y así conocer su nivel de conocimientos.

A continuación, le invito a desarrollar la siguiente autoevaluación, cuyo objetivo es conocer cuánto usted ha comprendido del tema, además podrá revisar en la sección del solucionario, la retroalimentación de cada pregunta.

Estoy seguro de que le irá ¡muy bien!

Autoevaluación 8.15

Lea y responda en el espacio entre paréntesis si es verdadera con "V" o falsa con "F".

1.-	( )	El interés compuesto se calcula sobre un nuevo capital que ha ganado intereses.
2.-	( )	La ecuación del interés compuesto es una expresión exponencial
3.-	( )	Si se coloca un capital a tres años plazo quiere decir que son a 9 cuatrimestres.
4.-	( )	Una renta pagadera a fin de cada trimestre es una renta anticipada anual
5.-	( )	Una tasa del 3% capitalizable anual, puede utilizarse con un plazo de 15 meses
6.-	( )	El valor actual o presente de una renta de $100,oo mensuales anticipada, durante 12 años al 6% compuesto anual es de $12.000,oo.
7.-	( )	Una renta anticipada es la que se cancela el primer día del período convenido.
8.-	( )	Un fondo de amortización se utiliza para reponer bienes que tienen una depreciación.
9.-	( )	Se requerirán 60 meses o mas, si se deposita al final de cada mes $200,oo , para liquidar $12.000,oo a uma tasa del 5% capitalizable anualmente.
10.-	( )	La renta de aproximadamente $2.000,oo cubriría una deuda de $10.000,oo al 6% anual durante 4 años.

Verifique sus respuestas en el solucionario al final de la presente guía didáctica.

"Cómo es posible un error en las matemáticas"

Henry Poincare

¡¡Éxitos en la tarea que ha emprendido!!

Ir al solucionario

Resultado de aprendizaje 16

Utiliza la abstracción como una habilidad adquirida para sintetizar y analizar situaciones propuestas que pueden ser modeladas matemáticamente. .

La siguiente semana aprenderá a reconocer una desigualdad y la aplicación de modelos reales que las utilizará en matemática como restricciones o limitantes que están presentes en la vida real.

Enfrentará la resolución de una desigualdad, la identificará, entenderá y comprenderá su propósito, usted mismo será capaz de generar las restricciones que pudiera enfrentar su modelo matemático de manera práctica y sostenida.

Acudirá a metodologías ya aprendidos anteriormente para resolver sistemas de ecuaciones lineales con cualquier número de incógnitas, dominará los métodos, representrá las regiones que son motivo de discusión y de decisión, así como ubicará el conjunto de valores que son la solución a una ecuación objetivo una vez que haya discriminado las restricciones o que la situación que enfrenta satisface estos requerimientos.

Finalmente será capaz de maximizar utilidades o minimizar gastos o costos llevando lo aprendido a situaciones de la vida real.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje

Semana 16

8.6 Desigualdades con dos variables

Hay ocaciones en que una proposición puede tener dos variables a interpretar, pero solo nos dan una condición o propuesta, en estos casos de lo aprndida no se podría solucionar ya que emfrentamos una ecuación con dos incógnitas, a eso podemos sumar que no necesariamente debe ser igual si no que presenta condicione de mayor o menor e igual al mismo tiempo. Entonces la programación lineal ayuda a determinar sectores o zonas en las cuales se cumplen las condiciones de proposición. Son ejemplos el proveer de combustible a los vehículos de una cooperativa de taxis al determinar varias clases de motores, cantidad variable de galones en el tanque de combustible y finalmente sin funcionan a gasolina, gas o eléctricos.

Para estas circunstancias se presenta una metodología que pude ayudar a resolver estas situaciones.

Usted ya sabe resolver una desigualdad con una variable, ya le estudió en capítulos anteriores, ahora suponga que tiene una desigualdad con dos variables como por ejemplo:

$$3x + 2y \leq 50, en\ la\ cual\ x, y \geq 0$$

La solución está representada por una región que corresponde a un biplano en un plano cartesiano. El modelo es el siguiente:

$$ax + by + c < 0, \qquad (a \leq 0, \qquad \geq 0, \qquad > 0)$$

Donde:

a, b, c, son constantes y a y b no son cero.

La solución es geométrica de una desigualdad lineal en x y y, con todos los puntos (x;y) en el plano cuyos puntos satisfacen la desigualdad.

Digamos que tenemos $3x + 2y < 20$, el punto (3;5) arroja la siguiente solución:

$$3x + 2y < 20$$

$$3(3) + 2(5) < 20$$

$$9 + 10 < 20$$

$$19 < 20, OK,$$

Este punto cumple o satisface la desigualdad, pero podría generarse un conjunto infinito de puntos que satisfagan a la desigualdad, de ahí que la solución es una región.

Ejemplo de aplicación dada la desigualdad:

$$2x + y < 5$$

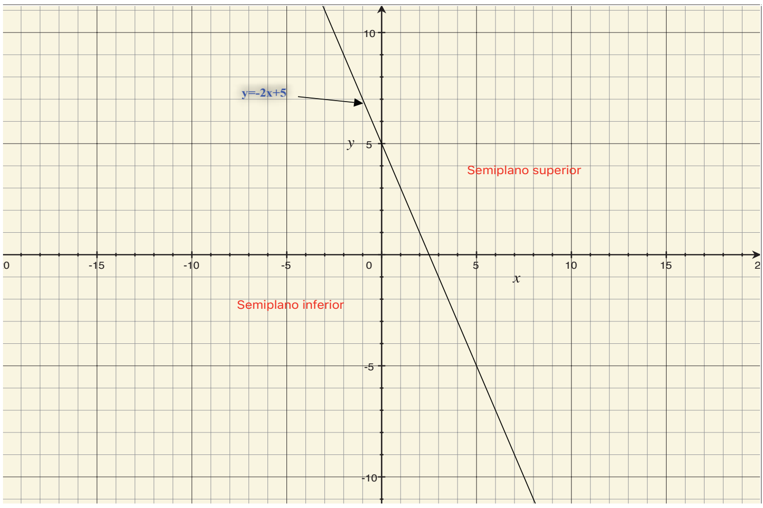
Consideremos primeo como una ecuación para poder determinar la recta y graficarla asi:

$$2x + y = 5$$

Despejando la "y", para tener un modelo y=mx+b, tenemos:

$$y = -2x + 5$$

Se trata de una recta que corta el eje "y" en (0;5) y tiene una pendiente negativa de -2.



La recta divición al plano en dos semiplanos o regiones una de estas, cumplirá la condición inicial, para verificar si una coordenada es punto del conjunto solución, procedemos de la siguiente manera: Escojamos el punto A(2;2), punto que se encuentra en el semiplano superior y reemplacemos sus valores en la desigualdad original, así:

$$2x + y < 5$$

reemplacemos "2" en "x" y "2" en "y", resolviendo la desigualdad tenemos:

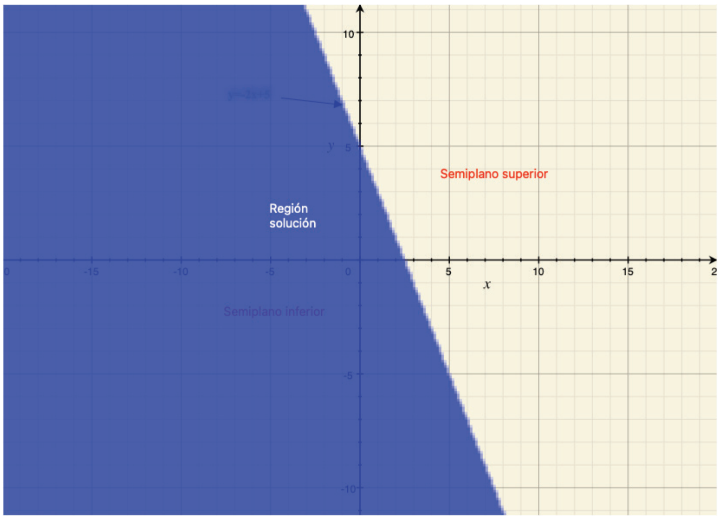
$$2(2) + 2 < 5$$

$$4 + 2 < 5$$

$$\mathbf{6 < 5;}$$

$$la\ respuesta\ no\ satisface\ la\ inecuación.$$

En consecuencia, el punto A, y la región o semiplano superior en el que se encuentra el punto NO es la región solución, será entonces la región de semiplano inferior. A esto se representa de la siguiente manera:



Si prefiere, se puede comprobar con un punto que puede ser el B(0;0), que pertenece al semiplano inferior y verificamos la desigualdad, de la siguiente manera:

$$2x + y < 5$$

reemplacemos "0" en "x" y "0" en "y", del punto B, resolviendo la desigualdad tenemos:

$$2(0) + 0 < 5$$

$$0 + 0 < 5$$

$$\mathbf{0 < 5;}$$

$$la\ respuesta\ satisface\ la\ inecuación.$$

Se confirma entonces que el semiplano inferior satisface a la desigualdad.

Revise y resuelva de la página 306 de su Texto básico, el Ejercicio 7,1, los numerales 1 al 6.

Recuerde

Algunos textos grafican la recta con línea segmentada o discontinua cuando la desigualdad contiene el igual,

Ejemplo 71

Encuentre la región solución de la siguiente desigualdad:

$$6x + 2y > 12$$

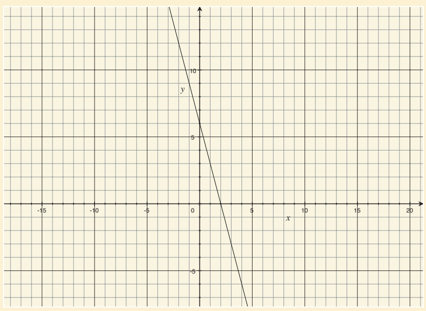
Genere la respectiva ecuación, para ser facilmente representada:

$$6x + 2y = 12$$

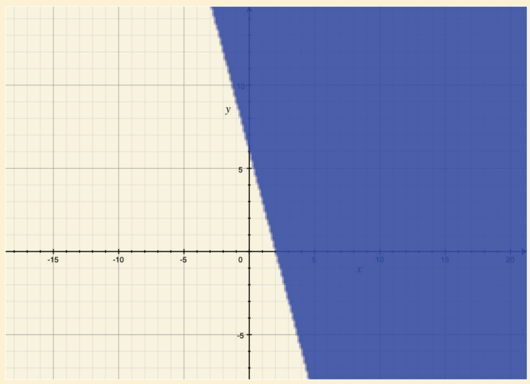
$$y = \frac{12 - 6x}{2} = 6 - 3x$$

$$\boldsymbol{y = 6 - 3x}$$

Represente la recta:



Verificación con un punto A(1;2)
$6x + 2y > 12$
$6(1) + 2(2) > 12$
$6 + 4 > 12$
$\mathbf{10 > 12}$
No cumple la desigualdad en el semiplano inferior, por lo tanto la respuesta es la región del semiplano superior. La región solución sería:

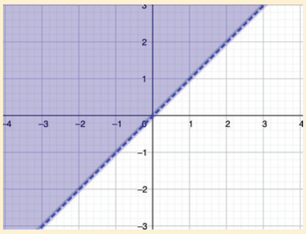
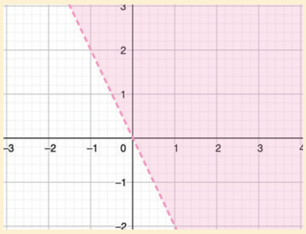
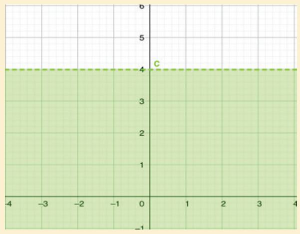


Esta misma metodología se puede aplicar a sistemas de desigualdades, por ejemplo:

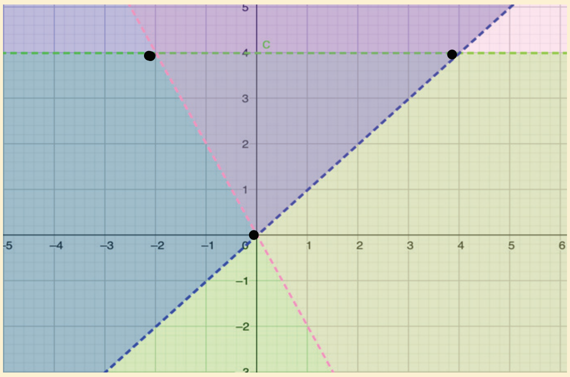
Ejemplo 72

Encuentre la región solución del siguiente sistema de desigualdades:

$$\begin{cases} y > x \\ y: -2x \\ y < 4 \end{cases}$$

$y > x$	$y > -2x$	$y < 4$
		

La intersección de las tres gráficas es la región solución, los puntos negros señalan el triángulo solución.



Revise y resuelva de la página 306 de su Texto básico, el Ejercicio 7,1, los numerales 18 al 24.

8.7 Programación lineal

La matemática ofrece entregar máximos o mínimos en el análisis de una función partiendo de ciertas restricciones, son ejemplos prácticos cuando se desea maximizar las utilidades de una empresa de productos alimenticios con ciertas restricciones en uso de maquinaria o la falta de mano de obra. Aprenderá entonces a maximizar o minimizar una función lineal y que tiene o cumple el siguiente modelo:

$$Z = ax + by$$

Cumplido el modelo se verificará que a y b sean constantes y que las restricciones se encuentren expresadas como desigualdades lineales o ecuaciones lineales, además de que todas las variables sean No negativas .

Un ejercicio o aplicación que en su información tenga todo lo descrito anteriormente se denomina un "Problema de programación lineal".

La función que se va a maximizar o minimizar se denomina **"función objetivo".**

Las restricciones establecidos en un sistema se denomina **"soluciones factibles"**

Entonces una y solo una de este conjunto de soluciones es la solución que maximiza o miniminiza la función a esta solución se la denomina "**solución óptima**"

El siguiente ejemplo explica paso a paso la metodología de resolución:

Ejemplo 73

Una industria de productos alimenticios produce manual y mecànicamente los mismos. Cada producto utiliza tres máquinas electrónicas A, B y C, se conoce que el producto manual requiere la máquina A, durante 2 horas, la B por 1 hora y de la C también una hora. El producto mecánico requiere de la máquina A una hora, en la B, dos horas y una hora en la máquina C. Pero se sabe que las máquinas A, B, C están disponibles 180, 160 y 100 horas al mes respectivamente. La utilidad de la industria en el producto manual es de $4,oo y en el mecánico de $6,oo.

La industria vende todo lo que produce, basado en eso cuantos artículos manuales y mecánicos debe producir para maximizar su utilidad por mes.

Llamaremos "x" a los productos manueales y "y" a los mecánicos, como son visibles y se producen estos artículos entonces: $x \geq 0, \; y. \; y \geq 0.$

La información se traslada a una tabla para ser visualizada mejor:

	A	B	C	Utilidad
Manual	2 Hs	1 Hs	1 Hs	$4,oo
Mecánico	1 Hs	2 Hs	1 Hs	$6,oo
Disponibilidad	180 Hs	160 Hs	100 Hs	

Para cada máquina habrá entonces una desigualdad que muestre el tiempo que necesitan fabricar los dos tipos de artículos, también se puede tabular así:

Máquina A	$2x + y \leq 180$
Máquina B	$x + 2y \leq 160$
Máquina C	$x + y \leq 100$
Utilidad	$P = 4x + 6y$

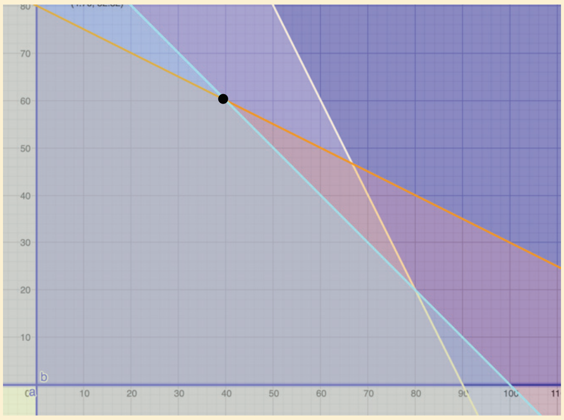
Entonces se deberá maximizar la Utilidad es decir la función:

$$\boldsymbol{P = 4x + 6y}$$

Establezca las restricciones que menciona el problema, así:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x + y \leq 180 \\ x + 2y \leq 160 \\ x + y \leq 100 \end{cases}$$

Busquemos la región de solución y determine cual es la intersección de dos rectas que maximicen la utilidad. Las dos desigualdades en rojo cruzan en un punto máximo, entonces resuelva el sistema y encuentre los valores respectivos.



$$\begin{cases} x + 2y \leq 160 \\ x + y \leq 100 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema por cualquier método, obtenemos lo siguiente:

$$x = 40, \quad y = 60$$

Para hallar la utilidad máxima, simplemente reemplazamos los valores así:

$$P = 4x + 6y$$

$$P = 4(40) + 6(60)$$

$$\boldsymbol{P = \$520, oo}$$

La utilidad se maximiza si producimos 40 productos manualmente y 80 productos mecánicamente.

Revise y resuelva de la página 310 de su Texto básico, el Ejemplo 1 y 2.

Recuerde
Si desea investigar mas y dominar este tema que es muy útil en la práctica, analice y resuelva del Ejercicio 7.2 de su Texto guía los ejemplos del 1 al 10.,

8.8 Aplicaciones de la programación lineal

Revise y resuelva de la página 330 de su Texto básico, el Ejercicio 7,4. los numerales 18 y 19.
Especial atención al ejemplo 3.

Se ha concluido el estudio de esta unidad, siempre le recomiendo revisar lo recomendado hasta que domine el tema en particular y detalles que usted confirma necesita mejorar y así conocer su nivel de conocimientos.

A continuación, le invito a desarrollar la siguiente autoevaluación, cuyo objetivo es conocer cuánto usted ha comprendido del tema, además podrá revisar en la sección del solucionario, la retroalimentación de cada pregunta.

Estoy seguro de que le irá ¡muy bien!

Autoevaluación 8.16

Lea y responda en el espacio entre paréntesis si es verdadera con "V" o falsa con "F".

1.-	( )	La programación lineal contempla un sistema de desigualdades a ser involucrado.
2.-	( )	Por lo general una ecuación objetivo es la utilidad de alguna empresa o industria.
3.-	( )	La región respuesta de un sistema de desigualdades es en donde se superponen los conjuntos solución de cada una de ellas.
4.-	( )	Dado el sistema: $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$, la región solución es el cuadrante comprendido entre el eje "x" positivo y "y" positivo.
5.-	( )	$El\ sistema \begin{cases} y > x \\ y: -2x \\ y < 4 \end{cases}$, aloja al punto de coordenadas (0;4) como un punto que se encuentra en la región respuesta.

Verifique sus respuestas en el solucionario al final de la presente guía didáctica.

"Dios hizo los números enteros, el resto es trabajo de los hombres"

Leopold Kronecker

¡¡Éxitos en la tarea que ha emprendido!!

Ir al solucionario

Solucionario a las Autoevaluaciones

Primer Bimestre

Autoevaluación 1.1		Autoevaluación 1.2		Autoevaluación 2.3		Autoevaluación 2.4	
1	F	1	V	1	F	1	V
2	V	2	V	2	V	2	V
3	V	3	V	3	V	3	F
4	V	4	V	4	V	4	V
5	V	5	V	5	V	5	V
6	V	6	V	6	V	6	V
7	V	7	V	7	V	7	V
8	V	8	V	8	V	8	V
9	V	9	V	9	V	9	F
10	V	10	V	10	V	10	V

Autoevaluación 3.5		Autoevaluación 3.6		Autoevaluación 4.7		Autoevaluación 4.8	
1	V	1	V	1	V	1	V
2	V	2	V	2	V	2	V
3	F	3	F	3	V	3	V
4	F	4	V	4	V	4	V
5	V	5	V	5	V	5	V
6	F	6	F	6	V	6	V
7	V	7	V	7	F	7	F
8	V	8	V	8	V	8	F
9	V	9	V	9	V		
10	V	10	V	10	V		

Segundo Bimestre

Autoevaluación 5.9		Autoevaluación 5.10		Autoevaluación 6.11		Autoevaluación 6.12	
1	V	1	V	1	V	1	V
2	V	2	V	2	V	2	V
3	V	3	V	3	V	3	F
4	V	4	F	4	F	4	V
5	V	5	V	5	V	5	V
6	V	6	V	6	V	6	V
7	F	7	V	7	F	7	V
8	F	8	V	8	V	8	V
9	V	9		9	V	9	V
10	V	10		10	V	10	V

Autoevaluación 7.13		Autoevaluación 7.14		Autoevaluación 8.15		Autoevaluación 8.16	
1	V	1	V	1	V	1	V
2	V	2	V	2	V	2	V
3	V	3	V	3	V	3	V
4	F	4	V	4	F	4	V
5	V	5	V	5	V	5	V
6	V	6	V	6	V		
7	F	7	V	7	F		
8	F	8	V	8	V		
9	V	9	V	9	V		
10	V	10	V	10	V		

IR AL ÍDICE

Imágenes:

- **Fotos:**

https://pixabay.com/es/

- **Gráficos:**

https://www.freepik.com/home

https://all-free-download.com/free-vectors/

FORMATO DE REVISIÓN DE GUÍAS GENERAL DE ESTUDIOS POR PARES ACADÉMICOS (MODALIDAD A DISTANCIA)

IDENTIFICACIÓN DE LA GUÍA GENERAL DE ESTUDIOS			
TÍTULO DE LA GUÍA GENERAL DE ESTUDIOS DE LA ASIGNATURA: MATEMÁTICA APLICADA			
FECHA DE ENTREGA DE LA GUÍA GENERAL DE ESTUDIOS DE LA ASIGNATURA: 31/8/2023		FECHA DE ENTREGA DE LA REVISIÓN REALIZADA: 17/10/2023	
2. DATOS DEL PAR ACADÉMICO (Los siguientes datos deben ser suministrados por el para académico y son de carácter obligatorio)			
NOMBRE Y APELLIDOS: Diego Enrique Polanco Calvachi	DIRECCIÓN: Av. Buenos Aires OE1-16 y Av. 10 de agosto		TELÉFONOS; 0999216079
CORREO ELETRÓNICO: dpolanco@tecnologicopichincha.edu.ec		CIUDAD: Quito	PAÍS: Ecuador
CARGO: Docente	INSTITUCIÓN: Instituto Universitario Pichincha	ÁREAS DE INTERÉS: Tecnologías Innovación Fuente De Energías Renovables	
ÚLTIMO TÍTULO ACADÉMICO OBTENIDO: Cuarto Nivel: Magister en Pedagogía y Docencia en Innovación Educativa			Nº. DE IDENTIFICACIÓN/ PASAPORTE: 1720749892

I. INSTRUCCIONES

1. Por favor responda **todas** las preguntas de este formulario.
2. Diligencie el formulario en computador.
3. **No modifique o altere las preguntas u opciones de este formulario**. La estructura de esta evaluación está planificada y responde a las políticas de publicación de las Guías General de Estudios de la MED.
4. Una vez finalice su diligenciamiento, debe devolverlo firmado vía e-mail a la persona que lo contactó.
5. Sea claro y preciso en sus respuestas.

6. Las respuestas del aparte de la fundamentación científica deben ser detalladas.
7. **En caso de no poder cumplir con el plazo** establecido, por favor **informar oportunamente al equipo editorial de la MED.**
8. En caso de detectar plagio, citación indebida o cualquier mala práctica, por favor comuníquelo al equipo editorial.

II. La guía de aprendizaje contiene:

ASPECTOS DE ESTILO A REVISAR	SI CUMPLE	NO CUMPLE
Márgenes	OK	
Numeración de páginas	OK	
Jerarquización de títulos	OK	
Tipo de letra	OK	
No existencia de encabezados o pies de páginas	OK	
Viñetas estandarizadas	OK	
Referencias de cuadros / Gráficos	OK	
Portada en acuerdo a Manual de estilo	OK	
Índice	OK	
Estructura de la guía		
4 unidades	OK	
Resultados de aprendizaje	OK	
Autoevaluación por cada unidad	OK	
Recursos de la guía	OK	
Redacción	OK	
Ortografía	OK	
Referencia Bibliográfica Norma APA séptima edición		OK
Informe anti-plagio	OK	

III. Fundamentación científica

ASPECTOS DE ESTILO A REVISAR	SI CUMPLE	NO CUMPLE
¿Los objetivos del texto están claramente enunciados y sustentados?	OK	
¿Utiliza una metodología adecuada para el desarrollo de los objetivos?	OK	
¿La presentación y argumentación de las ideas es coherente?	OK	
¿El manejo de conceptos, teorías y datos es preciso?	OK	
¿Existe relación entre el título, el problema, los objetivos, el marco teórico o metodológico y las conclusiones?	OK	
¿El tema es pertinente y brinda aportes a su área de conocimiento?	OK	

IV. Presentación de la información

ASPECTOS DE ESTILO A REVISAR	SI CUMPLE	NO CUMPLE
¿El autor utiliza un lenguaje claro y conciso?	OK	
¿Hay coherencia en la presentación y desarrollo de las ideas?	OK	
¿Las partes del trabajo se articulan entre sí y responden a los objetivos planteados?	OK	
¿Utiliza fuentes bibliográficas actualizadas (últimos tres años)?	OK	

¿Es adecuado el manejo del idioma por parte el autor (ortografía, redacción, sintaxis, puntuación)?	OK	
¿El texto se puede considerar original?	OK	

V. Recomendaciones

- Publicar sin modificaciones: X
- Publicar con modificaciones:
- No publicar:

V. Comentarios adicionales

El trabajo es coherente y reúne los requisitos para su publicación: X

FIRMA DEL EVALUADOR
Nombre: Msc. Diego Enrique Polanco Calvachi
ID: 1720749892

CERTIFICADO DE ANÁLISIS
magister

Guía Matemática Aplicada

3% Textos sospechosos

3% Similitudes
< 1% similitudes entre comillas
0% entre las fuentes mencionadas
< 1% Idiomas no reconocidos

Nombre del documento: Guía Matemática Aplicada.docx
ID del documento: d8853b7ee8b9d291e7821b6e4a50f8a7431ddd31
Tamaño del documento original: 6,79 MB

Depositante: PABLO FABIAN CARRERA TOAPANTA
Fecha de depósito: 8/3/2024
Tipo de carga: interface
fecha de fin de análisis: 8/3/2024

Número de palabras: 23.656
Número de caracteres: 144.002

Ubicación de las similitudes en el documento:

Fuentes principales detectadas

N°	Descripciones	Similitudes	Ubicaciones	Datos adicionales
1	**repositorio.unican.es** https://repositorio.unican.es/xmlui/bitstream/handle/10902/1764/Galán Atienza, Benjamín.pdf?sequ... 3 fuentes similares	< 1%		Palabras idénticas: < 1% (163 palabras)
2	**repositorio.espe.edu.ec** https://repositorio.espe.edu.ec/bitstream/21000/13619/5/T-ESPE-053903.pdf.txt	< 1%		Palabras idénticas: < 1% (86 palabras)
3	**1library.co** | Funciones cuadráticas - RECTAS, PARÁBOLAS Y SISTEMAS DE ECUACIO... https://1library.co/article/funciones-cuadráticas-rectas-parábolas-sistemas-ecuaciones.q7w986nv	< 1%		Palabras idénticas: < 1% (92 palabras)
4	**ru.dgb.unam.mx** https://ru.dgb.unam.mx/bitstream/20.500.14330/TES01000673693/3/0673693_A1.pdf	< 1%		Palabras idénticas: < 1% (42 palabras)
5	**matematicai2020.blogspot.com** | TRINOMIO DE LA FORMA ax² + bx + c https://matematicai2020.blogspot.com/2020/02/trinomio-de-la-forma-ax-bx-c.html	< 1%		Palabras idénticas: < 1% (28 palabras)

Fuentes con similitudes fortuitas

N°	Descripciones	Similitudes	Ubicaciones	Datos adicionales
1	**proyecto2000.edu.ec** | Producción Agrícola https://proyecto2000.edu.ec/oferta-academica/carrera-de-desarrollo-agricola/	< 1%		Palabras idénticas: < 1% (37 palabras)
2	**TRABAJO TÉCNICO.docx** | TRABAJO TÉCNICO.docx #052d23 El documento proviene de mi grupo	< 1%		Palabras idénticas: < 1% (28 palabras)
3	**www.lifeder.com** | 80+ frases de matemáticas para estudiantes y maestros https://www.lifeder.com/frases-matematicas/	< 1%		Palabras idénticas: < 1% (23 palabras)
4	**nexmexico.ir** | resolución de desigualdades de primer y segundo grado con una i... https://nexmexico.ir/post/resolución-de-desigualdades-de-primer.p6421	< 1%		Palabras idénticas: < 1% (20 palabras)
5	**uvadoc.uva.es** https://uvadoc.uva.es/bitstream/10324/32171/1/TFM-G852.pdf	< 1%		Palabras idénticas: < 1% (23 palabras)

TECNOLÓGICO UNIVERSITARIO PICHINCHA

Buenos Aires OE1-16 y Av. 10 de Agosto

09123 456 789

(02) 2 238 291

www.tecnologicopichincha.edu.ec

Modalidad Distancia

ISBN: 978-9942-672-15-5

9789942672155